Übungen zur Vorlesung
Differentialgleichungen in der Wirtschaftsmathematik
Wintersemester 2010/11

Blatt 9

9.12.2010

1. (Basket-Optionen) Betrachtet werde eine Option auf zwei Basiswerte, deren Kurse gegeben sind durch

$$\begin{aligned}dS_1(t) &= \mu_1 S_1(t)dt + \sigma_1 S_1(t)dW_1(t), \\dS_2(t) &= \mu_2 S_2(t)dt + \sigma_2 S_2(t)dW_2(t),\end{aligned}$$

wobei $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ und W_1, W_2 Brownsche Bewegungen mit Korrelation $\rho > 0$ sind, d.h. $d\langle W_1(t), W_2(t) \rangle = \rho dt$. Die Endzahlung in Zeitpunkt $T > 0$ sei gegeben durch $g(S_1(T), S_2(T))$ für eine gegebene Funktion g . Leiten Sie eine partielle Differentialgleichung für den Preis $V(t, S_1, S_2)$ der Option mit zugehöriger Endbedingung her, indem Sie ein risikoloses und selbstfinanzierendes Duplikationsportfolio betrachten. Wie lautet die entsprechende Hedging-Strategie?

2. (Amerikanische binäre Optionen) Betrachtet werde ein amerikanischer Cash-or-nothing Call mit der Auszahlungsfunktion

$$g_1(S) = \begin{cases} B & , \quad S > K, \\ 0 & , \quad S \leq K. \end{cases}$$

- Bestimmen Sie den freien Randwert $S_f(t)$ der Option, der angibt, ab welchem Aktienkurs die vorzeitige Ausübung lohnend ist.
- Geben Sie das freie Randwertproblem für den Optionspreis $C(t, S)$ an und legen Sie sinnvolle Rand- und Endbedingungen fest.
- Transformieren Sie das Bewertungsproblem in ein lineares Komplementaritätsproblem

3. (Bermuda-Optionen) Eine *Bermuda-Option* ist eine amerikanische Option, die nur zu fest vorgegebenen Zeitpunkten $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$ vorzeitig ausgeübt werden kann. Schreiben Sie einen Algorithmus zur Bewertung eines Bermuda-Puts.