PD Dr. F. Guiaş

Übungen zur Vorlesung

Differentialgleichungen in der Wirtschaftsmathematik

Wintersemester 2010/11

Blatt 10

16.12.2010

1. (Barrier-Optionen) Betrachtet werde eine *Knock-Out-Option*, die verfällt, wenn zu einem beliebigen Zeitpunkt $t \in [0, T]$ der Aktienkurs $S(t)$ die Preisspanne (a, b) mit $0 \leq a < b \leq \infty$ verlässt.

   (a) Formulieren Sie das Bewertungsproblem als partielle Differentialgleichung mit passenden Rand- und Endbedingungen. (Betrachten Sie dabei den Fall $b = \infty$ separat.)

   (b) Der Payoff einer *Knock-In-Option* wird nur dann ausgezahlt, wenn zu einem beliebigen Zeitpunkt $t \in [0, T]$ der Aktienkurs $S(t)$ die Preisspanne (a, b) verlassen hat. Bewerten Sie diese Option mit Hilfe bislang bekannter Optionspreise.

2. (Lookback-Optionen) Betrachtet werde eine Option auf eine Aktie, deren Kurs gegeben ist durch

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) \quad (\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0).$$

Die Auszahlung $g(S(T), M(T))$ zum Zeitpunkt $T > 0$ sei abhängig vom Maximum des Aktienkurses,

$$M(t) = \max_{0 \leq s \leq t} S(s).$$

Zur Herleitung einer Differentialgleichung für den Preis $V(t, S, M)$ der Option wollen wir die Variable $M(t)$ durch

$$M_n(t) = \left(\int_0^t S^n(s) ds \right)^{1/n}$$

approximieren. Dies ist möglich, denn es gilt $M_n(t) \to M(t)$ f.s. für $n \to \infty$.

   (a) Leiten Sie eine stochastische Differentialgleichung für M_n her und verwenden Sie diese Gleichung, um mittels eines Arbitrage-Arguments die folgende Gleichung herzuleiten:

$$-rV + \frac{\partial V}{\partial t} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{S^n}{nM_n^{n-1}} \frac{\partial V}{\partial M_n} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = 0.$$

(b) Führen Sie für den Fall $S < M$ die Grenzwertbildung $n \to \infty$ durch, und begründen Sie, warum die Randbedingungen

$$V(t,0,M) = Me^{-r(T-t)}, \quad \frac{\partial V}{\partial M}(t,M,M) = 0$$

sinnvoll sind.

(c) Angenommen, die Endauszahlung ist von der Form $g(S,M) = M\tilde{g}(S/M)$, so kann das End-Randwertproblem durch die Transformation $V(t,S,M) = MW(t,S/M)$ auf ein zweidimensionales Problem reduziert werden. Stellen Sie das entsprechende End-Randwertproblem für W auf.

Abgabe am 6.01.2011 in der Vorlesung.
Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!