

Übungen zur Vorlesung
Differentialgleichungen in der Wirtschaftsmathematik
Wintersemester 2010/11

Blatt 11

06.01.2010

1. (Inversionsmethode zur Erzeugung nicht gleichverteilter Zufallszahlen) Sei F eine Verteilungsfunktion und U eine gleichverteilte Zufallsvariable auf dem Intervall $[0, 1]$.

(a) Zeige: Durch die Setzung $X := F^{-1}(U)$ mit

$$F^{-1}(u) := \inf \{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq u\}, \quad 0 \leq u \leq 1,$$

erhält man eine Zufallsvariable X mit Verteilungsfunktion F .

(b) Sei u eine Realisierung von U . Wie lautet dann eine sinnvolle Realisierung x einer Zufallsvariablen X , falls X

- (i) auf dem Intervall $[a, b]$ gleichverteilt,
- (ii) exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$ oder
- (iii) diskret

ist.

2. Sei X eine Zufallsvariable mit bekannter Verteilungsfunktion F , für die die Momente $\mu = E[X]$ und $\sigma^2 = Var[X]$ existieren, aber unbekannt sind. Um eine Schätzung für den Erwartungswert μ zu erhalten, simuliere man n Realisierungen $X_1, \dots, X_n$ und berechne den Mittelwertschätzer

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

(a) Angenommen, es sei $\mu \in [1000, 2000]$ bekannt. Eine Abweichung der Schätzung $\bar{X}_n$ vom tatsächlichen Mittelwert μ von weniger als 10 werde daher als akzeptabel angesehen. Bestimmen Sie mit dem zentralen Grenzwertsatz ein $n \in \mathbb{N}$ (in Abhängigkeit von σ) so, dass $P(|\bar{X}_n - \mu| < 10) \approx 0,95$ gilt.

- (b) Wie in Aufgabenteil (a) gesehen, hängt die Anzahl der benötigten Simulationen von der unbekannten Varianz σ^2 ab. Daher erscheint auch die Schätzung von σ^2 sinnvoll. Zeigen Sie, dass der Varianzschätzer

$$\tilde{s}_n^2 := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

nicht erwartungstreu ist, d.h.

$$E[\tilde{s}_n^2] \neq \sigma^2.$$

Geben Sie stattdessen einen geeigneten Varianzschätzer $\hat{s}_n^2$ an, der erwartungstreu ist.

- (c) Um den Fehler $|\bar{X}_n - \mu|$ bzw. die Anzahl n der notwendigen Simulationen zu verkleinern, ist man bemüht, die Varianz von $\bar{X}_n$ zu reduzieren. Angenommen, $\bar{X}_n$ sei mittels einer $N(0, 1)$ -verteilten Zufallsvariablen Z erzeugt, d.h. die i -te Realisierung von X erhält man aus der i -te Realisierung von Z gemäß $X_i = h(Z_i)$ für eine Funktion h . Man setze $X_i^- = h(-Z_i)$ und $\bar{X}_n^- = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^-$ und verwende dann als Mittelwertschätzer die *antithetische Variable*

$$\hat{\bar{X}}_n = \frac{1}{2}(\bar{X}_n + \bar{X}_n^-).$$

Zeigen Sie, dass $Var[\hat{\bar{X}}_n] < Var[\bar{X}_n]$ gilt.

Abgabe am 13.01.2010 in der Vorlesung.