

Übungen zur Vorlesung
Differentialgleichungen in der Wirtschaftsmathematik
 Wintersemester 2010/11

Blatt 12

13.01.2010

1. (Portfolio-Optimierung im Ein-Perioden-Modell) Betrachte das folgende Ein-Perioden-Modell mit zwei Wertpapieren: Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird über die Portfoliozusammensetzung aus den zweien sich am Markt befindenden Wertpapieren entschieden. Zwischen dem Zeitpunkt $t = 0$ und dem Endzeitpunkt $t = T$ kann nicht gehandelt werden. Sei R_i die Rendite des i -ten Wertpapiers, und setze

$$\mu_i := E[R_i], \quad \sigma_{ij} := Cov[R_i, R_j].$$

Bezeichne mit $\pi = (\pi_1, \pi_2)$ den Portfoliovektor, d.h. π_i entspricht dem Anteil am Gesamtvermögen, der in Wertpapier i investiert ist. Es muss $\pi_i \geq 0$ gelten sowie die Budgetgleichung $\pi_1 + \pi_2 = 1$ erfüllt sein. Ferner bezeichne mit R^π die Portfolio-Rendite. Berechne für allgemeine Marktparameter μ_i, σ_{ij} den Erwartungswert und die Varianz von R^π .

Sei nun konkret

$$\begin{aligned} \mu_1 = 1, \quad \mu_2 = 0.9 \quad \text{und} \\ \sigma_{11} = 0.1, \quad \sigma_{22} = 0.15, \quad \sigma_{12} = \sigma_{21} = -0.1. \end{aligned}$$

- (a) Vergleichen Sie die Renditen der Portfolios $(1, 0)$ und $(1/2, 1/2)$. Versuchen Sie mögliche Überlegungen aufzuzeigen, die zu diesen Strategien führen könnten.
- (b) Bestimmen Sie das varianzminimale Portfolio, d.h. löse das Minimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min_{\pi} Var[R^\pi]. \\ NB : \pi_1, \pi_2 \geq 0, \\ \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{aligned}$$

- (c) Finden Sie die Lösung des Varianz-Erwartungswert-Problems

$$\begin{aligned} \min_{\pi} Var[R^\pi]. \\ NB : \pi_1, \pi_2 \geq 0, \\ \pi_1 + \pi_2 = 1, \\ E[R^\pi] \geq 0.96 \end{aligned}$$

2. Betrachte einen Finanzmarkt ohne Bond, aber mit 2 Aktien mit Preisprozessen

$$\begin{aligned}dS_0(t) &= \mu_0 S_0(t)dt + \sigma_0 S_0(t)dW(t), \\dS_1(t) &= \mu_1 S_1(t)dt + \sigma_1 S_1(t)dW(t)\end{aligned}$$

für eine eindimensionale Brownsche Bewegung W und $\mu_0, \mu_1 \in \mathbb{R}$, $\sigma_0, \sigma_1 > 0$, $\sigma_0 \neq \sigma_1$.

- (a) Wie lässt sich durch Kombination der beiden Aktien ein risikoneutrales Portfolio erzeugen?
- (b) Lösen Sie das Endvermögensmaximierungsproblem

$$\sup_{\pi_0(\cdot)} E_{t,x} [\ln(X(T))],$$

wobei X der Vermögensprozess ist, wenn man zur Zeit t den Anteil $\pi_0(t)$ am Gesamtvermögen in die Aktie S_0 investiert. (Tipp: Gehen Sie hierzu wie im Beispiel aus der Vorlesung vor, in dem ein Markt mit einem Bond und einer Aktie betrachtet wird.)

Abgabe am 20.01.2010 in der Vorlesung.