PD Dr. F. Guiaş

Übungen zur Vorlesung

Differentialgleichungen in der Wirtschaftsmathematik

Wintersemester 2010/11

Blatt 13

20.01.2010

1. Betrachte den gesteuerten Prozess

$$X(t) = x + \int_0^t u(s)ds + W(t),$$

wobei $(u(t))_{t\in[0,T]} \subset U = \mathbb{R}$ der gewählte Steuerungsprozess und $(W(t))_{t\in[0,T]}$ eine eindimensionale Brownsche Bewegung ist. Ziel soll es sein, durch optimale Wahl von $u(t)$ den Erwartungswert

$$E_{t,x}\left[\beta X(T) - \int_t^T \alpha u^2(s)ds\right]$$

mit $\alpha, \beta > 0$ zu maximieren.

(a) Versuchen Sie, die optimale Strategie $u^*(t)$ auf direktem Weg zu bestimmen und berechnen Sie damit die Wertfunktion $V(t,x)$. (Tipp: Unter geeigneten Voraussetzungen an $u(t)$ - genauer: falls die folgenden Erwartungswerte existieren - gilt

$$E_{t,x}[X(T)] = x + E_{t,x}\left[\int_t^T u(s)ds\right].)$$

(b) Stellen Sie für das stochastische Steuerungsproblem die HJB-Gleichung auf und zeigen Sie, dass die in Aufgabenteil (a) bestimmte Wertfunktion die HJB-Gleichung löst.

2. Betrachte das stochastische Steuerungsproblem

$$\sup_{u(.)} E\left[(X(T))^\gamma\right]$$

mit dem gesteuerten Prozess

$$dX(t) = \mu u(t)dt + u(t)dW(t), \quad X(0) = x > 0,$$

wobei $\mu \in \mathbb{R}$, $\gamma \in (0,1)$ und $u(t) \in U = \mathbb{R}$.

Zeige, dass die optimale Strategie $u^*(t)$ und die Wertfunktion $V(t,x)$ die Formen

$$\begin{aligned} u^*(t) &= \frac{\mu}{1-\gamma} X(t), \\ V(t,x) &= \exp\left(\frac{\mu^2\gamma}{2(1-\gamma)}(T-t)\right) \cdot x^\gamma \end{aligned}$$

besitzen.

Abgabe am 27.01.2010 in der Vorlesung.