Fakultät für Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. Winfried Kaballo

Technische Universität Dortmund

Übungsaufgaben Analysis III, Blatt 11

Aufgabe 1. Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x) = |\sin(x)|, \quad x \in \mathbb{R}$$

in eine Fourierreihe.

Aufgabe 2. (Schrödingergleichung) Man betrachte die (homogene) Schrödingergleichung

$$\begin{aligned} i\partial_t u - \Delta u &= 0 \\ u(0,\cdot) &= u_0, \end{aligned} \tag{1}$$

wobei Δ der Laplacoperator sei, und $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Lösungen von (1) sind Funktionen der Form $u : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ in $C^1([0,T], \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}))$.
a) Formulieren Sie, analog zur Wärmeleitungsgleichung aus der Vorlesung, mithilfe einer örtlichen (d.h. in x) Fouriertransformation die Gleichung (1) in eine gewöhnliche Differentialgleichung (in der Zeit t) um.
b) Geben Sie für diese resultierende Gleichung eine Lösung für $\hat{u}$ an.
c) Man verwende b), um für Lösungen u von (1) die *Erhaltungssätze*

$$||u(\cdot,t)||_{L^2} \;=\; ||u_0||_{L^2} \quad \forall t \in [0,T] \tag{2}$$

und

$$||D^k u(\cdot,t)||_{L^2} \;=\; ||D^k u_0||_{L^2} \quad \forall t \in [0,T], k \in \mathbb{N}_0 \tag{3}$$

herzuleiten.

Aufgabe 3. a) Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $T \in GL(\mathbb{R}^n)$ zeige man

$$\widehat{f \circ T}(\xi) = |\det T|^{-1} \hat{f}((T^T)^{-1}\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

b) Man folgere aus a), dass mit f auch $\hat{f}$ rotationssymmetrisch ist.

Aufgabe 4. Es sei $f \in \mathcal{C}^{n+1}(\mathbb{R}^n)$ mit $\partial^\alpha f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$ für $|\alpha| \le n+1$. Man zeige $\hat{f} \in \mathcal{L}_1$.