

Übungsaufgaben Analysis III, Blatt 11

Aufgabe 1. Es seien C_α die *Cauchydichten*, die durch

$$C_\alpha(x) = \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2 + x^2)}, \quad \alpha > 0$$

gegeben sind.

Man zeige mithilfe von

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix\xi}}{1 + \xi^2} = e^{-|x|}, \quad (1)$$

daß gilt

$$\widehat{C}_\alpha(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\alpha|\xi|}$$

und schliesse daraus, daß $C_\alpha * C_\beta = C_{\alpha+\beta}$.

Aufgabe 2. Für $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{K_R(0)})$ zeige man $\hat{\varphi} \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ sowie

$$\sup_{\zeta \in \mathbb{C}^n} (1 + |\zeta|)^k e^{-R|\operatorname{Im}\zeta|} |\hat{\varphi}(\zeta)| < \infty, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

Aufgabe 3. Man löse das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} 2\dot{x} + x &= 2(t-1)x^3 \\ x(0) &= 1 \end{aligned} \quad (2)$$

Aufgabe 4. Man berechne alle Lösungen von

$$y' = (x+y)^2$$

und ebenso von

$$y' = 1 + \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$$