TU Dortmund
Prof. Dr. Winfried Kaballo SoSem 2012

Distributionen und Differentialoperatoren

Blatt 1

Aufgabe 1. Verifizieren Sie die Montel-Eigenschaft des Raumes $\mathcal{C}^\infty[a,b]$. Ist auch $\mathcal{C}(a,b)$ ein Montelraum?

Aufgabe 2. a) Es sei E ein lokalkonvexer Raum. Verifizieren Sie die folgenden Permanenzeigenschaften des Systems $\mathfrak{B}(E)$ der beschränkten Mengen auf E: Teilmengen beschränkter Mengen sind ebenfalls beschränkt. Aus $A, B \in \mathfrak{B}(E)$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ folgt, dass auch $A \cup B \in \mathfrak{B}(E)$ und $\alpha A + B \in \mathfrak{B}(E)$ und auch die absolutkonvexe Hülle

$$\Gamma(B) = \{\sum_{k=1}^{n} s_k x_k \,|\, n \in \mathbb{N},\, x_k \in B,\, s_k \in \mathbb{K},\, \sum_{k=1}^{n} |s_k| \leq 1\}$$

von B ist beschränkt.
Verifizieren Sie weiter die entsprechenden Eigenschaften des Systems $\mathfrak{C}(E)$ der präkompakten Mengen auf E: Teilmengen präkompakter Mengen sind ebenfalls präkompakt. Aus $A, B \in \mathfrak{C}(E)$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ folgt, dass auch $A \cup B \in \mathfrak{C}(E)$ und $\alpha A + B \in \mathfrak{C}(E)$ und auch die absolutkonvexe Hülle $\Gamma(B)$ von B ist präkompakt.
b) Zeigen Sie, dass eine Menge $B \subset E$ genau dann beschränkt ist, wenn für jede Folge (x_k) in E aus $\alpha_k \to 0$ in $\mathbb{K}$ stets $\alpha_k x_k \to 0$ in E folgt.

Aufgabe 3. Geben Sie ein Fundamentalsystem von Normen auf $\mathcal{C}[a,b]$ an, die durch ein Skalarprodukt erzeugt werden. Finden Sie weitere Frecheträume, für die dies möglich ist.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass für $0 \leq m \leq \infty$ der Raum $C_c^m((a,b))$ dicht liegt im Frechetraum $C^m((a,b))$.