TU Dortmund
Prof. Dr. Winfried Kaballo SoSem 2012

Distributionen und Differentialoperatoren
Blatt 3
Abgabe: 26. April 2012 im Raum 639

Aufgabe 9. Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Menge. Konstruieren Sie eine Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $f \geq 0$ und $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in A$. Hinweis: Zu $y \notin A$ sei $\varepsilon > 0$ mit $\overline{U}_\varepsilon(y) \cap A = \emptyset$. Es gibt $0 \leq \rho \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $supp\, \rho = \overline{U}_\varepsilon(y)$. Verwende eine Zerlegung der Eins.

Aufgabe 10. Zeigen Sie, dass alle klassischen Lösungen der Wellengleichung $(\partial_t^2 - c^2\partial_x^2)u = 0$ gegeben sind durch

$$u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct), \quad f,g \in C^2(\mathbb{R}).$$

Hinweis: Mit $\xi := \frac{1}{2}(ct + x)$, $c\tau := \frac{1}{2}(ct - x)$ kann man die Wellengleichung zu $c\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\tau}u = 0$ transformieren.

Aufgabe 11. Es sei der gewöhnliche Differentialoperator

$$P(x,D) = \sum_{j=0}^{m} a_j(x)(\frac{d}{dx})^j$$

mit $a_m \not\equiv 0$ und $a_j \in C^\infty(\mathbb{R})$ für $j = 0, ..., m$ gegeben. Es sei $u_j \in \mathcal{N}(P(D))$ und $u_j \to u$ lokal gleichmäßig für $j \to \infty$. Zeigen Sie, dass dann $u \in C^m(\mathbb{R}) \cap \mathcal{N}(P(D))$.

Aufgabe 12. Zeigen Sie die Existenz der Grenzwerte $\frac{1}{x \pm i0} := \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \dfrac{1}{x \pm i\varepsilon}$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ und beweisen Sie die Formeln $\frac{1}{x\pm i0} = \mp i\pi\delta + CH\frac{1}{x}$ sowie $\delta = \frac{1}{2\pi i}(\frac{1}{x-i0} - \frac{1}{x+i0})$.