TU Dortmund
Prof. Dr. Winfried Kaballo SoSem 2012

Distributionen und Differentialoperatoren
Blatt 4
Abgabe: 3. Mai 2012 im Raum 639

Aufgabe 13. Für Folgen $(\phi_k) \in \mathcal{E}(\Omega)$ und (u_k) in $\mathcal{D}'(\Omega)$ gelte $\phi_k \to \phi$ in $\mathcal{E}(\Omega)$ und $u_k \to u$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$. Zeigen Sie $\phi_k u_k \to \phi u$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Aufgabe 14. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\frac{d}{dx} : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathcal{D}(\mathbb{R})$ injektiv ist und bestimmen Sie ihr Bild.

Aufgabe 15. Für $1 \le p \le \infty$ und $h \in \mathbb{R}^n$ wird durch $\tau_h f(x) := f(x-h)$ ein *Translationsoperator* auf $L_p(\mathbb{R}^n)$ definiert.
a) Zeigen Sie $||\tau_h f||_{L_p} = ||f||_{L_p}$ und $||\tau_h f - f||_{L_p} \to 0$ für $h \to 0$ und $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$.
Hinweis: Zuerst $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, dann Satz 1.4.
b) Nun gelte $f, \partial_j f \in L_p(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie $\partial_j \tau_h f = \tau_h \partial_j f$ und schließen Sie daraus $\partial_j \tau_h f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ sowie $||\partial_j(\tau_h f - f)||_{L_p} \to 0$ für $h \to 0$.

Aufgabe 16. a) Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $a \in I$ und $u \in \mathcal{C}^1(I \setminus \{a\})$. „Die“ Funktion v mit $v(x) = u'(x)$ für $x \neq a$ liege in $L_1^{loc}(I)$. Zeigen Sie die Existenz der Grenzwerte $u(a^\pm)$ sowie

$$u' = v + (u(a^+) - u(a^-))\delta_a.$$

b) Zeigen Sie $\frac{d}{dx} x_+ = H$ und $\frac{d}{dx} log|x| = CH\frac{1}{x}$.