TU Dortmund SoSem 2012
Prof. Dr. Winfried Kaballo

Distributionen und Differentialoperatoren
Blatt 5
Abgabe: 10. Mai 2012 im Raum 639

Aufgabe 17. a) Es seien $a, b \in \mathbb{R}^n$. Berechnen Sie $\delta_a \otimes \delta_b$ und $\delta_a * \delta_b$.
$\delta_a \otimes \delta_b = \delta_{(a,b)}$, $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$.
b) Es sei H die Heaviside-Funktion auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie $\delta' * H = \delta$ und $1 * \delta' = 0$. Schließen Sie $(1 * \delta') * H \neq 1 * (\delta' * H)$

Aufgabe 18. Ein *Halbraum* in $\mathbb{R}^{n+1}$ ist gegeben durch $H = \{(x,t) \mid t \geq 0\}$; ein *Kegel* $\Gamma_+ \subset H$ durch $\Gamma_+ = \{(x,t) \mid t \geq c|x|\}$ mit $c > 0$. Zeigen Siem dass für Distributionen $u, v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ mit *supp* $u \subset H$ und supp $v \subset \Gamma_+$ die Faltung definiert ist.

Aufgabe 19. Berechnen Sie $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \xi}{\xi}\right)^3 d\xi$ und $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \xi}{\xi}\right)^6 d\xi$.

Aufgabe 20. Es sei $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ in jedem beschränkten Intervall stückweise stetig differenzierbar. Zeigen Sie

$$\lim_{y \to \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-y}^{y} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi = \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-)),\ x \in \mathbb{R}.$$

Hinweis: Man kann $x = 0$ annehmen und es gilt

$$\int\limits_{-y}^{y} \widehat{f}(\xi)\, d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}} \chi_{[-y,y]} \widehat{f}(\xi)\, d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{\chi_{[-y,y]}} f(\xi)\, d\xi = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\sin y\xi}{\xi} f(\xi)\, d\xi.$$