TU Dortmund SoSem 2012
Prof. Dr. Winfried Kaballo

Distributionen und Differentialoperatoren
Blatt 7
Abgabe: 24. Mai 2012 im Raum 639

Aufgabe 25. Es seien $A \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{M}_{\mathbb{C}}(n))$ eine stetige Matrixfunktion und $b \in C([a,b], \mathbb{C}^n)$ eine stetige Vektorfunktion. Ein Tupel $f \in W_1^1((a,b), \mathbb{C}^n)$ von Sobolev-Funktionen löse das lineare System von Differentialgleichungen

$$f'(t) + A(t)f(t) = b(t)$$

im schwachen Sinne. Zeigen Sie, dass dann $f \in C^1([a,b], \mathbb{C}^n)$ gilt und eine klassische Löesung des Systems ist.
Hinweis: Konstruieren Sie mit dem Satz von Picard-Lindelöf eine invertierbare Matrixfunktion $\psi \in C^1([a,b].\mathbb{M}_{\mathbb{C}}(n))$ mit $\psi' = \psi A$ und beachten Sie $(\psi f)' = \psi b$.

Aufgabe 26. a) Zeigen Sie, dass für $1 \leq p < \infty$ der Abschluss von $\mathcal{D}(a,b)$ in $W_p^1(a,b)$ gegeben ist durch

$$\overset{\circ}{W}{}_p^1(a,b) := \{f \in W_p^1(a.b) : f(a) = f(b) = 0\}.$$

b) Folgern Sie, dass der Raum

$$\{f \in W_p^1(a,b) : f(a) = f(b)\}$$

der Abschluss des Raumes $\mathcal{C}_{2\pi}^1 = \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ der periodischen $\mathcal{C}^1$-Funktionen in $W_p^1(a,b)$ ist.

Aufgabe 27. Verifizieren Sie, dass die Funktion $f : x \mapsto log \mid log \,|\, x \,||$ aus dem Beispiel auf Seite 69 für $0 < R < 1$ in $W_n^1(U_R)$ liegt.

Aufgabe 28. Finden Sie eine offene Menge in $\mathbb{R}^2$ ohne Segment-Eigenschaft.