TU Dortmund SoSem 2012
Prof. Dr. Winfried Kaballo

Distributionen und Differentialoperatoren
Blatt 8
Abgabe: 31. Mai 2012 im Raum 639

Aufgabe 29. a) Für welche $k \in \mathbb{N}_0$ liegt die Funktion $f : x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$ in $W^k(\mathbb{R})$? Gilt $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$?
b) Für welche $s \in \mathbb{R}$ liegen die Funktionen $\chi_{(-1,1)}$, $H = \chi_{(0,\infty)}$ und 1 in $H^s(\mathbb{R})$?

Aufgabe 30. Für $s \geq 0$ seien $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ und $g \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie $f * g \in H^s(\mathbb{R}^n)$ und $||f * g||_{H^s} \leq ||f||_{L_1} ||g||_{H^s}$.

Aufgabe 31. Es sei $s \geq 0$. Beweisen Sie die Vollständigkeit der Räume $W_p^s(\Omega)$.

Aufgabe 32. Es seien $1 \leq p \leq \infty$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.
a) Weiter sei $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ mit $||g'||_{sup} < \infty$, und es gelte $g(0) = 0$ oder $\lambda(\Omega) < \infty$. Für $f \in W_p^1(\Omega)$ zeigen Sie $g \circ f \in W_p^1(\Omega)$ und die *Kettenregel* $(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$.
b) Für $f \in W_p^1(\Omega)$ zeigen sie auch $|f| \in W_p^1(\Omega)$.
Hinweis: Approximieren Sie $g(y) := y_+$ durch $g_\varepsilon(y) := \sqrt{y^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon$ für $y > 0$.