TU Dortmund
Prof. Dr. Winfried Kaballo

SoSem 2012

Distributionen und Differentialoperatoren
Blatt 9
Abgabe: 31. Mai 2012 im Raum 639

Aufgabe 33. Zeigen Sie, dass eine Distribution $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *lokal* eine endliche Summe von Ableitungen *stetiger* Funktionen ist.

Aufgabe 34. Sind die Einbettungen $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^t(\mathbb{R}^n)$ kompakt für $s > t$?

Aufgabe 35. Es sei $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$, sodass auch $\widehat{f} \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$ ist. Zeigen Sie

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{i\langle x,\xi\rangle} \widehat{G^t}(\xi)\, d\xi = (f * G^t)(x) \qquad \text{für } t > 0$$

und geben Sie mittels $t \to 0^+$ einen alternativen Beweis von Satz 3.5.

Aufgabe 36. Es sei $(S(t) = S_{*G^{2\alpha t}})$ die Halbgruppe in $L(L_2(\mathbb{R}^n))$ aus Satz 5.1. Zeigen Sie:
a) Für $s \geq 0$ und $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ gilt $Sf \in \mathcal{C}([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n))$.
b) Für $s \geq 2$ und $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ gilt $Sf \in \mathcal{C}^1([0,\infty), H^{s-2}(\mathbb{R}^n))$.