TU Dortmund
Prof. Dr. Winfried Kaballo SoSem 2012

Distributionen und Differentialoperatoren
Blatt 11
Abgabe: 28. Juni 2012 im Raum 639

Aufgabe 41. Zeigen Sie den Satz von *Du Bois-Reymond*: Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u, f \in \mathcal{C}(\Omega)$. Gilt $\partial_j u = f$ im Distributionssinn, so ist u nach x_j partiell differenzierbar mit klassischer Ableitung $\partial_j u = f$.
Hinweis: Es genügt, den Fall $u \in \mathcal{C}_c(\Omega)$ zu behandeln; dazu verwendet man Faltung mit Glättungsfunktionen.

Aufgabe 42. Verifizieren Sie die Hörmander-Bedingung für die Hypoelliptizität bei folgenden Operatoren:
a) $\partial_t^2 - c^2\Delta_x$ im $\mathbb{R}^{n+1}$
b) $-i\partial_t - \frac{\hbar}{2m}\Delta_x$ in 3 Raumdimensionen
c) $\partial_{\bar{z}}$
d) Δ
e) $\partial_t - \alpha\Delta_x$

Aufgabe 43. Es seien $P(D)$ ein hypoelliptischer Differentialoperator, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $N_\Omega(P) := \{f \in \mathcal{C}(\Omega) : P(D)f = 0\}$. Für eine Folge (f_n) in $N_\Omega(P)$ gelte $f_n \to f$ lokal gleichmäßig auf Ω. Zeigen Sie $f \in N_\Omega(P)$ und $\partial^\alpha f_n \to \partial^\alpha f$ lokal gleichmäßig auf Ω für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

Aufgabe 44. Für $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ gelte $P(D)v = 0$. Zeigen Sie $v = 0$.