TU Dortmund
Prof. Dr. Winfried Kaballo
Dr. Martin Heida

WS 2012/13

Funktionalanalysis I

Blatt 1

Abgabe: 16. Oktober 2012, 12:00

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Es sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum. Zeigen Sie, dass $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ vollständig ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.**
a) Sind die Normen $\| \ \|_{\sup}$ und $\| \ \|_1$ auf $\mathcal{C}[a, b]$ äquivalent?
b) Sind die Normen $\| \ \|_1$ und $\| \ \|_2$ auf $\mathcal{C}[a, b]$ äquivalent?
c) Impliziert die punktweise Konvergenz auf $\mathcal{C}[a, b]$ die im Mittel? Gilt die umgekehrte Implikation?

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.**
a) Es sei Ω ein Maßraum mit $\mu(\Omega) < \infty$, z. B. $\Omega = [a, b]$. Für $1 \le p < q \le \infty$ zeigen Sie $\mathcal{L}_q(\Omega) \subseteq \mathcal{L}_p(\Omega)$ und $\| f \|_{L_p} \le \mu(\Omega)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \| f \|_{L_q}$ für $f \in \mathcal{L}_q(\Omega)$.
b) Für $1 \le p < q \le \infty$ zeigen Sie $\ell_p \subseteq \ell_q$ und $\| x \|_q \le \| x \|_p$ für $x \in \ell_p$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Der Raum der *endlichen* Folgen ist definiert durch

$$\varphi := \ \{x = (x_j)_{j=0}^\infty \mid \exists\, k\ \forall\, j > k \ : \ x_j = 0\}\,.$$

Bestimmen Sie die Abschlüsse von φ in den Räumen ℓ_p für $1 \le p \le \infty$.