TU DORTMUND
PROF. DR. WINFRIED KABALLO
DR. MARTIN HEIDA

WS 2012/13

Funktionalanalysis I
Blatt 2
Abgabe: 23. Oktober 2012, 14:00

Aufgabe 5 (1 Punkt)**.** Es seien X ein normierter Raum, $V \subseteq X$ ein abgeschlossener Unterraum und $\pi : X \to Q = \frac{X}{V}$ die Quotientenabbildung. Zeigen Sie:
a) Zu einer konvergenten Folge (q_n) in Q gibt es eine konvergente Folge (x_n) in X mit $\pi x_n = q_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
b) Eine Menge $W \subseteq Q$ ist genau dann offen in Q, wenn $\pi^{-1}(W)$ offen in X ist.
c) Eine Abbildung $f : Q \to M$ von Q in einen metrischen Raum M ist genau dann stetig, wenn $f \circ \pi : X \to M$ stetig ist.

Aufgabe 6 (1 Punkt)**.**
a) Es sei M ein metrischer Raum, so dass es für jedes $\varepsilon > 0$ ein *präkompaktes* ε*-Netz* in M gibt. Zeigen Sie, dass M präkompakt ist.
b) Es seien X ein normierter Raum und $A, B \subseteq X$ beschränkt oder präkompakt. Untersuchen Sie, ob auch $A \cap B$, $A \cup B$, $A + B$, $\overline{A}$ und $\mathrm{co}A$ beschränkt bzw. präkompakt sind.

Aufgabe 7 (1 Punkt)**.** Es sei $1 \leq p < \infty$. Zeigen Sie, dass eine beschränkte Menge $A \subseteq \ell_p$ genau dann präkompakt ist, falls gilt:

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{x=(x_j)\in A} \sum_{j=m}^{\infty} |\, x_j \,|^p \;=\; 0\,.$$

Aufgabe 8 (1 Punkt)**.** Es sei M ein metrischer Raum. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:
(a) Der Raum M ist separabel.
(b) Jede offene Überdeckung von M besitzt eine *abzählbare* Teilüberdeckung.
(c) Für jedes $\varepsilon > 0$ besitzt M ein abzählbares ε-Netz.