TU Dortmund WS 2012/13
Prof. Dr. Winfried Kaballo
Dr. Martin Heida

Funktionalanalysis I
Blatt 3
Abgabe: 30. Oktober 2012, 14:00

Aufgabe 9 (1 Punkt)**.** Es seien X, Y normierte Räume. Zeigen Sie, dass $L(X,Y)$ ein Vektorraum ist, auf dem durch

$$\|f\|_{L(X,Y)} := \sup_{x \in X} \frac{\|f(x)\|_Y}{\|x\|_X}, \qquad f \in L(X,Y)$$

eine Norm auf $L(X,Y)$ definiert wird.

Aufgabe 10 (1 Punkt)**.** Gegeben seien die Linearformen $S : f \mapsto \int_{-1}^{1} f(t)\,dt$ und $\delta : f \mapsto f(0)$ auf $\mathcal{C}^1[-1,1]$. Untersuchen Sie, ob diese Linearformen bezüglich der Normen $\| \ \|_{\sup}$, $\| \ \|_{L_1}$, $\| \ \|_{L_2}$ oder $\| \ \|_{\mathcal{C}^1}$ stetig sind, und berechnen Sie gegebenenfalls ihre Normen.

Aufgabe 11 (1 Punkt)**.** Zeigen Sie, dass die Räume $\Lambda^\alpha(K)$, $\lambda^\alpha(K)$ und $\mathcal{C}^m[a,b]$ Banachräume sind.

Aufgabe 12 (1 Punkt)**.** Es seien M und N Mengen. Eine *vektorwertige* Funktion $f \in \mathcal{F}(M, \mathcal{F}(N))$ *von einer Variablen* $t \in M$ kann man mit einer *skalarwertigen* Funktion

$$F(t,s) := f(t)(s), \quad t \in M, \quad s \in N,$$

von zwei Variablen $(t,s) \in M \times N$ identifizieren.
a) Zeigen Sie die lineare Isomorphie

$$\mathbb{K}[t,s] \cong \mathbb{K}[t] \otimes \mathbb{K}[s]$$

für den Raum der *Polynome* in zwei Variablen.
b) Nun seien K und L kompakte metrische Räume. Zeigen Sie

$$\mathcal{C}(K \times L) \cong \mathcal{C}(K, \mathcal{C}(L))$$

im Sinne einer linearen bijektiven Isometrie. Folgern Sie, dass das Tensorprodukt $\mathcal{C}(K) \otimes \mathcal{C}(L)$ im Banachraum $\mathcal{C}(K \times L)$ *dicht* ist.