TU Dortmund
Prof. Dr. Winfried Kaballo
Dr. Martin Heida

WS 2012/13

Funktionalanalysis I
Blatt 4
Abgabe: 6. November 2012, 14:00

Aufgabe 13 (1 Punkt). a) Beweisen Sie das *Rieszsche Lemma:* Es seien X ein normierter Raum und $V \subseteq X$ ein echter abgeschlossener Unterraum. Zu $0 < \varepsilon < 1$ gibt es dann $x \in X$ mit $\| x \| = 1$ und $d_V(x) \geq \varepsilon$.
b) Geben Sie mit Hilfe des Rieszschen Lemmas einen weiteren Beweis von Satz 3.8.

Aufgabe 14 (1 Punkt). a) Zeigen Sie, dass die *Translationsoperatoren* $T_h : f \mapsto f(t-h)$ für $h \in \mathbb{R}^n$ *Isometrien* auf $L_p(\mathbb{R}^n)$ definieren.
b) Für $1 \leq p < \infty$ zeigen Sie $\| T_h f - f \|_{L_p} \to 0$ für $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ und $h \to 0$.

Verwenden Sie die Dichtheit von $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ in $L_p(\mathbb{R}^n)$ und einen Satz aus der Vorlesung.

Aufgabe 15 (1 Punkt). Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ messbar und beschränkt, $\sigma \in L_\infty(\Omega^2)$ und $0 \leq \gamma < n$. Zeigen Sie, dass der *schwach singuläre Integraloperator*

$$Sf(t) := \int_\Omega \frac{\sigma(t,s)}{|\, t-s \,|^\gamma} f(s)\, ds$$

für alle $1 \leq p \leq \infty$ einen beschränkten linearen Operator auf $L_p(\Omega)$ definiert. Für welche Exponenten γ liegt der Kern $\kappa(t,s) = \frac{\sigma(t,s)}{|\, t-s \,|^\gamma}$ in $L_2(\Omega^2)$?

Aufgabe 16 (1 Punkt). a) Finden Sie eine zur $\mathcal{C}^m$-Norm äquivalente Norm auf $\mathcal{C}^m[a,b]$, unter der $\mathcal{C}^m[a,b]$ eine Banachalgebra ist.
b) Es sei $f \in \mathcal{C}^m[a,b]$ mit $\| f \|_{\sup} < 1$. Zeigen Sie die Konvergenz der Neumannschen Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f^k$ (gegen $\frac{1}{1-f}$) in $\mathcal{C}^m[a,b]$.