TU Dortmund
Prof. Dr. Winfried Kaballo
Dr. Martin Heida

WS 2012/13

Funktionalanalysis I

Blatt 5

Abgabe: 13. November 2012, 14:00

Aufgabe 17 (1 Punkt)**.** Es sei X ein Banachraum, und für $T \in L(X)$ gelte $\sum_{k=0}^{\infty} \| T^k x \| < \infty$ für alle $x \in X$. Zeigen Sie, dass $I - T : X \to X$ bijektiv ist, und versuchen Sie, die Stetigkeit von $(I-T)^{-1}$ zu beweisen.

Aufgabe 18 (1 Punkt)**.** Mit einer beschränkten Folge (α_j) in $\mathbb{C}$ wird ein *Diagonaloperator* $D : \ell_2 \to \ell_2$ definiert durch

$$D : \ (x_0, x_1, x_2, \ldots) \mapsto (\alpha_0 x_0, \alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots)\,.$$

Berechnen Sie $\| D \|$, $r(D)$, $\sigma(D)$ und die Eigenwerte von D.

Aufgabe 19 (1 Punkt)**.**

a) Beweisen Sie Satz 4.2 für die Folgenräume c_0 und ℓ_p ($1 \leq p \leq \infty$), für die Funktionenräume $\mathcal{C}(K)$ und möglichst viele weitere konkrete Banachräume.

b) Es seien X und Y Banachräume, so dass Satz 4.2 für Y gilt. Zeigen Sie Satz 4.2 auch für den Banachraum $L(X,Y)$.

Aufgabe 20 (1 Punkt)**.** Zeigen Sie die absolut und gleichmäßig konvergente Entwicklung

$$|\sin t| \;=\; \frac{2}{\pi} \;-\; \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kt}{(2k-1)(2k+1)}\,.$$

Was erhält man für $t = 0$ und $t = \frac{\pi}{2}$?