TU Dortmund
Prof. Dr. Winfried Kaballo
Dr. Martin Heida

WS 2012/13

Funktionalanalysis I
Blatt 6
Abgabe: 20. November 2012, 14:00

Aufgabe 21 (1 Punkt).
a) Für eine kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine stetige Funktion $a \in \mathcal{C}(K)$ definiert man einen *Multiplikationsoperator* M_a auf $L_2(K)$ durch

$$M_a : f \ \mapsto \ af \quad \text{für} \ \ f \in L_2(K)\,.$$

Berechnen Sie $\| M_a \|$, $r(M_a)$ und $\sigma(M_a)$. Besitzt M_a Eigenwerte?
b) Es sei eine kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{C}$ gegeben. Finden Sie einen Operator $T \in L(L_2(K))$ mit $\sigma(T) = K$.
c) Zeigen Sie, dass die Abbildung $a \mapsto M_a$ eine multiplikative Isometrie von $\mathcal{C}(K)$ in $L(L_2(K))$ ist.

Aufgabe 22 (1 Punkt).
a) Zeigen Sie, dass eine konvergente Reihe $\sum_{k\geq 0} a_k$ auch Cesàro-konvergent ist mit
$\text{C-}\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\,.$
b) Beweisen Sie die Umkehrung von a) unter der Zusatzbedingung $|\, a_k \,| = o(\frac{1}{k})$.
c) Zeigen Sie $|\, a_k \,| = o(k)$ für jede Cesàro-konvergente Reihe.

Aufgabe 23 (1 Punkt).
Eine Funktion f heißt von *beschränkter Variation*, Notation: $f \in \mathcal{BV}[a,b]$, falls

$$\mathsf{V}(f) := \mathsf{V}_a^b(f) := \sup\{\sum_{k=1}^{r} |\, f(t_k) - f(t_{k-1}) \,| \mid Z \in \mathfrak{Z}[a,b]\} \ < \ \infty$$

gilt. $\mathsf{V}(f)$ heißt dann *totale Variation* von f über J.
a) Zeigen Sie: f ist genau dann von beschränkter Variation, wenn f Differenz zweier monoton wachsender Funktionen ist *(Jordan-Zerlegung)*. Ist f zusätzlich stetig, so existiert eine solche Jordan-Zerlegung aus stetigen Funktionen.
b) Finden Sie eine Funktion $f \in \mathcal{C}[a,b]$, die nicht von beschränkter Variation ist.
c) Definieren Sie eine Norm auf $\mathcal{BV}[a,b]$, unter der dieser Raum vollständig ist und welche die W_1^1-Norm auf $C^1[a,b]$ induziert.

Aufgabe 24 (1 Punkt).
a) Es seien $\{e_1, \ldots, e_m\}$ ein Orthonormalsystem in einem Hilbertraum H und $x \in H$. Für welchen Vektor $y = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i\, e_i \in [e_1, \ldots, e_m]$ wird der *Abstand* $\| x - y \|$ minimal?
b) Zeigen Sie $\| f - s_n(f) \|_{L_2} \leq \| f - \sigma_n(f) \|_{L_2}$ für alle $f \in L_2[-\pi, \pi]$.