TU Dortmund
Prof. Dr. Winfried Kaballo
Dr. Martin Heida

WS 2012/13

Funktionalanalysis I
Blatt 7
Abgabe: 27. November 2012, 14:00

Aufgabe 25 (1 Punkt)**.**
Es seien $\Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ messbare Mengen und $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ bzw. $\{\psi_k\}_{k=0}^{\infty}$ eine Orthonormalbasis von $L_2(\Omega_1)$ bzw. $L_2(\Omega_2)$. Geben Sie eine Orthonormalbasis von $L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$ an.

Aufgabe 26 (1 Punkt)**.**
Es seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine messbare Menge, $\kappa \in L_2(\Omega^2)$ ein quadratintegrierbarer Kern und $A = (a_{ij})$ die Matrix des Integraloperators S_κ bezüglich einer Orthonormalbasis von $L_2(\Omega)$. Zeigen Sie

$$\sum_{i,j} |\, a_{ij}\,|^2 \;=\; \int_{\Omega^2} |\, \kappa(t,s)\,|^2\, d(t,s) < \infty\,.$$

Aufgabe 27 (1 Punkt)**.**
Es sei H ein Hilbertraum. Eine Abbildung $\beta : H \times H \to \mathbb{C}$ heißt *sesquilinear,* falls β in der ersten Komponente linear und in der zweiten Komponente antilinear ist. Zeigen Sie: Es gibt genau einen linearen Operator $T : H \to H$ mit

$$\beta(x,y) \;=\; \langle x | Ty \rangle \quad \text{für alle} \quad x, y \in H\,,$$

und man hat $\|\, T\,\| = \sup\{|\, \beta(x,y)\,| \mid \|\, x\,\|\,,\ \|\, y\,\| \le 1\}$.
Ist β bzw. T zusätzlich *koerziv,* so gilt $T \in GL(H)$ *(Satz von Lax-Milgram).*

Aufgabe 28 (1 Punkt)**.**
a) Verifizieren Sie Formel (15).
b) Zeigen Sie, dass alle Nullstellen der Legendre-Polynome P_n einfach sind und in $(-1,1)$ liegen.