TU Dortmund
Prof. Dr. Winfried Kaballo
Dr. Martin Heida

WS 2012/13

Funktionalanalysis I

Blatt 8

Abgabe: 4. Dezember 2012, 14:00

Aufgabe 29 (1 Punkt)**.**
Es seien H, G Hilberträume, $T \in L(H,G)$ mit abgeschlossenem Bild $R(T)$ und $y \in G$.
a) Bestimmen Sie $M(y) := \{x \in H \mid \|Tx - y\| \text{ ist minimal}\}$.
b) Zeigen Sie, dass $M(y)$ genau ein Element $T^\times y$ minimaler Norm besitzt.
c) Zeigen Sie, dass die *„verallgemeinerte Inverse“* $T^\times : G \to H$ von T linear ist und $TT^\times T = T$, $T^\times TT^\times = T^\times$ erfüllt. Versuchen Sie, die Stetigkeit von $T^\times$ zu beweisen!

Aufgabe 30 (1 Punkt)**.**
a) Es sei S_{*a} der durch $a \in L_{1,2\pi}$ gegebene Faltungsoperator. Zeigen Sie

$$R(\lambda I - S_{*a}) \;=\; N(\lambda I - S_{*a})^\perp \quad \text{für} \quad \lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

b) Es sei $\lambda \neq 0$. Für welche Funktionen $g \in L_2[-\pi,\pi]$ hat die Integralgleichung

$$\lambda f(t) - \int_{-\pi}^{\pi} a(t-s)\, f(s)\, ds \;=\; g(t)$$

Lösungen $f \in L_2[-\pi,\pi]$? Geben Sie alle Lösungen an!

Aufgabe 31 (1 Punkt)**.**
Es sei P die orthogonale Projektion auf den abgeschlossenen Unterraum V des Hilbertraumes H.
a) Zeigen Sie, dass $I - P$ die orthogonale Projektion auf $V^\perp$ ist.
b) Für einen Operator $T \in L(H)$ zeigen Sie

$$T(V) \subseteq V \;\Leftrightarrow\; T^*(V^\perp) \subseteq V^\perp \;\Leftrightarrow\; PTP = TP.$$

c) Nun sei T normal, und es gelte $T(V) \subseteq V$ und $T(V^\perp) \subseteq V^\perp$. Zeigen Sie, dass die Restriktion $T|_V \in L(V)$ von T auf V ebenfalls normal ist.

Aufgabe 32 (1 Punkt)**.**
Es sei $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ die Menge der rationalen Zahlen in $[0,1]$. Wir definieren die Mengen $M_k := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_{2^{-k-n}}(r_n)$ und $M := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} M_k \cap [0,1]$. Zeigen Sie:
a) Die Menge $N := [0,1]\backslash M$ ist mager, hat aber Lebesgue-Maß $\lambda(N) = 1$.
b) Es ist M eine Lebesgue-Nullmenge, die abzählbarer Durchschnitt offener Mengen ist und dicht in $[0,1]$ liegt.