TU Dortmund
Prof. Dr. Winfried Kaballo
Dr. Martin Heida

WS 2012/13

Funktionalanalysis I
Blatt 10
Abgabe: 18. Dezember 2012, 14:00

Aufgabe 37 (1 Punkt)**.**
Es seien X ein normierter Raum, (x_n) eine Folge in X und (α_n) eine Folge in $\mathbb{K}$. Gesucht ist eine stetige Linearform $f \in X'$ mit $f(x_n) = \alpha_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
a) Zeigen Sie: Dieses *Momentenproblem* ist genau dann lösbar, wenn gilt:

$$\exists\, C > 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}\ \forall\, \lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}\ :\ \left| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, \alpha_k \right| \ \leq\ C \sum_{k=1}^{n} \| \lambda_k\, x_k \| .$$

b) Es sei $f_n \in \mathcal{C}[0,1]$ die „Dreiecksfunktion“ auf $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ mit Höhe 1. Für welche Folgen (α_n) in $\mathbb{K}$ gibt es $\mu \in \mathcal{C}[0,1]'$ mit $\mu(f_n) = \alpha_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$?

Aufgabe 38 (1 Punkt)**.**
Für einen Hilbertraum H sei

$$j = j_H\ :\ H \mapsto H',\quad j(y)(x) := \langle\, x | y\, \rangle,\quad x\,,\, y \in H\,,$$

die kanonische antilineare Isometrie von H auf den Dualraum H' aus (10). Zeigen Sie $T^* = j_H^{-1}\, T'\, j_G$ für Hilberträume H, G und Operatoren $T \in L(H,G)$.

Aufgabe 39 (1 Punkt)**.**
a) Es seien X ein normierter Raum und $f \in \mathcal{C}([a,b], X)$. Zeigen Sie, dass durch

$$F\ :\ x' \mapsto \int_a^b \langle f(t), x' \rangle\, dt$$

ein Funktional $F \in X''$ definiert wird.
b) Zeigen Sie $F \in \iota_X(X)$ für vollständige Räume X. Durch

$$\int_a^b f(t)\, dt :=\ \iota_X^{-1}(F) \in X$$

lässt sich also das *Integral* von f definieren.

Hinweis: Approximieren Sie F durch Riemannsche Zwischensummen!

Aufgabe 40 (1 Punkt)**.**
Beweisen Sie die Bemerkungen b), c), d) und e) aus der Vorlesung zu reflexiven Räumen.