TU Dortmund
Prof. Dr. Winfried Kaballo
Dr. Martin Heida

WS 2012/13

Funktionalanalysis I
Blatt 12
Abgabe: 15. Januar 2013, 14:00

Aufgabe 45 (1 Punkt).
Es sei E ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Eine Menge $K \subseteq E$ heißt *kreisförmig,* falls für $x \in K$ und $|\,\alpha\,| \leq 1$ stets auch $\alpha x \in K$ gilt. Zeigen Sie:
$K \subseteq E$ ist genau dann kreisförmig und konvex, wenn K absolutkonvex ist.

Aufgabe 46 (1 Punkt).
Es seien X ein normierter Raum und $C, D \subseteq X$ konvexe und absorbierende Mengen mit Minkowski-Funktionalen p_C und p_D. Zeigen Sie:
a) Man hat $C \subseteq D \;\Leftrightarrow\; p_D \leq p_C$.
b) Das sublineare Funktional p_C ist genau dann stetig, wenn $0 \in \overset{\circ}{C}$ gilt. Beschreiben Sie in diesem Fall $\overset{\circ}{C}$ und $\overline{C}$ mittels p_C.

Aufgabe 47 (1 Punkt).
Es seien X, Y normierte Räume, $T \in L(X, Y)$ und $\emptyset \neq A \subseteq X$.
a) Zeigen Sie $T(A)^\circ = T'^{-1}(A^\circ)$.
b) Zeigen Sie $T(A) \subseteq B \Leftrightarrow T'(B^\circ) \subseteq A^\circ$ für jede absolutkonvexe und abgeschlossene Menge $B \subseteq Y$.

Aufgabe 48 (1 Punkt).
Es seien X ein Banachraum und (x_n), (x'_n) Folgen mit $x_n \overset{w}{\to} x$ und $x'_n \overset{w^*}{\to} x'$ in X und X'. Zeigen Sie, dass $\langle x_n, x'_n \rangle \to \langle x, x' \rangle$ *nicht* gelten muss. Unter welchen zusätzlichen Bedingungen kann man dies doch schließen?