TU Dortmund
Prof. Dr. Winfried Kaballo
Dr. Martin Heida

WS 2012/13

Funktionalanalysis I
Blatt 13
Abgabe: 22. Januar 2013, 14:00

Aufgabe 49 (1 Punkt).
Es sei $\pi : X \to Q$ eine Quotientenabbildung, und es sei (q_n) eine schwach konvergente Folge in Q. Gibt es eine schwach konvergente Folge (x_n) in X mit $\pi x_n = q_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$?

Aufgabe 50 (1 Punkt).
Es sei H ein Hilbertraum.
a) Zeigen Sie $\| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} e_j \| \to 0$ für jede orthonormale Folge (e_n) in H.
b) Beweisen Sie den *Satz von Banach-Saks:* In H gelte $x_n \xrightarrow{w} x$. Dann gibt es eine Teilfolge (x_{n_j}) von (x_n) mit $\| \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} x_{n_j} - x \| \to 0$.
Dies gilt sogar in L_p-Räumen für $1 < p < \infty$ (vgl. Woytaszczyk *Banach spaces for analysts* Cambridge Univ. Press 1991, III.A.27).

Aufgabe 51 (1 Punkt).
Es seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar und beschränkt, $\sigma \in L_\infty(\Omega^2)$ und $0 \leq \gamma < n$. Zeigen Sie, dass der *schwach singuläre Integraloperator*

$$Sf(t) := \int_\Omega \frac{\sigma(t,s)}{|\, t-s\,|^\gamma} \, f(s)\, ds$$

einen *kompakten* linearen Operator auf $L_2(\Omega)$ definiert.
Hinweis: Betrachten Sie $S_\varepsilon f(t) := \int_{|\,s-t\,| \geq \varepsilon} \frac{\sigma(t,s)}{|\,t-s\,|^\gamma} \, f(s)\, ds$ für $\varepsilon > 0$.

Aufgabe 52 (1 Punkt).
Es seien X, Y, Z Banachräume, $S \in K(X,Y)$, und $T \in L(Y,Z)$ sei injektiv. Beweisen Sie das *Lemma von Ehrling:*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, C_\varepsilon > 0 \ \forall\, x \in X \ : \ \|\, Sx \,\|_Y \ \leq \ \varepsilon \,\|\, x \,\|_X + C_\varepsilon \,\|\, TSx \,\|_Z \,.$$