TU Dortmund
Prof. Dr. Winfried Kaballo
Dr. Martin Heida

WS 2012/13

Funktionalanalysis I
Blatt 14
Abgabe: 29. Januar 2013, in der Vorlesung

Aufgabe 53 (1 Punkt)**.**
Es sei K ein kompakter metrischer Raum. Zeigen Sie, dass der Banachraum $\mathcal{C}(K)$ die A.E. hat.
Hinweis: Benutzen Sie Formel (2.5).

Aufgabe 54 (1 Punkt)**.**
Es seien X, Y Banachräume und $m \in \mathbb{N}$ fest. Eine Folge (F_n) in $\mathcal{F}(X,Y)$ mit $\operatorname{rk} F_n \leq m$ für alle $n \in \mathbb{N}$ konvergiere punktweise auf X gegen einen Operator $T \in L(X,Y)$. Zeigen Sie $T \in \mathcal{F}(X,Y)$ und $\operatorname{rk} T \leq m$.

Aufgabe 55 (1 Punkt)**.**
Es seien X ein Banachraum und $T \in \Phi(X)$ mit $\operatorname{ind} T = 0$, $\operatorname{ind} T \leq 0$ bzw. $\operatorname{ind} T \geq 0$. Konstruieren Sie einen endlichdimensionalen Operator $F \in \mathcal{F}(X)$, so dass $T + F$ *bijektiv, injektiv* bzw. *surjektiv* ist.

Aufgabe 56 (1 Punkt)**.**
Wir skizzieren einen kurzen Beweis eines Spezialfalls von Theorem 11.11 c):
a) Es seien X ein Banachraum und $F \in \mathcal{F}(X)$. Konstruieren Sie eine Zerlegung $X = X_F \oplus_t N_F$ mit $\dim X_F < \infty$, $F(X_F) \subseteq X_F$ und $F(N_F) = \{0\}$.
b) Zeigen Sie $T := I - F \in \Phi_0(X)$.
c) Zeigen Sie $\operatorname{ind}(UT) = \operatorname{ind} T$ für $U \in GL(X)$ und $T \in \Phi(X)$.
d) Beweisen Sie $T := I - S \in \Phi_0(X)$ für $S \in \overline{\mathcal{F}(X)}$.