TU Dortmund
Prof. Dr. Winfried Kaballo
Dr. Martin Heida

WS 2012/13

Funktionalanalysis II

Blatt 2

Abgabe: 30. April 2013, 14:00

Aufgabe 5 (1 Punkt).
Es sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra ohne Einselement. Erweitern Sie $\mathcal{A}$ um eine Dimension zu einer Banachalgebra mit Einselement.

Aufgabe 6 (1 Punkt).
a) Es seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra und $x \in \mathcal{A}$ mit $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq D$. Zeigen Sie: Es gibt $\varepsilon > 0$, so dass für $\|y\| < \varepsilon$ auch $\sigma(x+y) \subseteq D$ gilt.
b) Es gelte $x_n \to x$ in einer Banachalgebra mit Eins. Zeigen Sie $f(x_n) \to f(x)$ für $f \in \mathcal{H}(\sigma(x))$. .

Aufgabe 7 (1 Punkt).
Es seien $x, y \in \mathcal{A}$ *kommutierende* Elemente, d. h. es gelte $xy = yx$. Zeigen Sie $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.

Aufgabe 8 (1 Punkt).
a) Zeigen Sie, dass der Raum $\mathcal{A} := \ell_1(\mathbb{N}_0, \frac{1}{k!})$ mit der Faltung eine Banachalgebra mit Eins ist.
b) Zeigen Sie $\mathrm{rad}\mathcal{A} = \{x = (x_k)_{k\geq 0} \in \mathcal{A} \mid x_0 = 0\}$ und folgern Sie $\mathfrak{M}(\mathcal{A}) = \{\delta_0\}$ sowie $\Gamma x(\delta_0) = x_0$ für $x \in \mathcal{A}$.
In diesem Fall „vergisst" die Gelfand-Transformation also fast alle Informationen über die Banachalgebra $\mathcal{A}$.