TU Dortmund
Prof. Dr. Winfried Kaballo
Dr. Martin Heida

WS 2012/13

Funktionalanalysis II
Blatt 6
Abgabe: 28. Mai 2013, 14:00

Aufgabe 21 (1 Punkt).
Für einen Operator $T \in L(X)$ gelte $P(T) \in K(X)$ für ein Polynom $P \in \mathbb{C}[\lambda]$. Zeigen Sie, dass das *wesentliche Spektrum* $\sigma_e(T)$ *endlich* ist und beschreiben Sie das Spektrum $\sigma(T)$ und die Resolvente $R(T)$.

Aufgabe 22 (1 Punkt).
a) Finden Sie einen nicht kompakten Operator T mit $T^2 = 0$.
b) Es seien $A, B \in L(X)$ Riesz-Operatoren. Sind dann auch $A + B$ und / oder AB Riesz-Operatoren?
c) Zeigen Sie, dass $T \in L(X)$ genau dann ein Riesz-Operator ist, wenn dies auf $T' \in L(X')$ zutrifft.

Aufgabe 23 (1 Punkt).
Es seien X ein Banachraum und $T \in L(X)$.
a) Zeigen Sie $N(T^k) = N(T^{\alpha(T)})$ für $k \geq \alpha(T)$ und $R(T^k) = R(T^{\delta(T)})$ für $k \geq \delta(T)$. b) Nun gelte $\alpha(T) < \infty$ und $\delta(T) < \infty$. Zeigen Sie $\alpha(T) = \delta(T)$.
c) Nun sei $\alpha(T) = \delta(T) =: p < \infty$. Zeigen Sie:
Es gilt $X = N(T^p) \oplus_t R(T^p)$, beide Räume sind invariant unter T, und $T|_{R(T^p)}$ ist bijektiv.
d) Finden Sie Operatoren $T \in \Phi(\ell_2)$ mit
1. $\alpha(T) < \infty$, $\delta(T) = \infty$; 2. $\alpha(T) = \infty$, $\delta(T) < \infty$; 3. $\alpha(T) = \delta(T) = \infty$.

Aufgabe 24 (1 Punkt).
Es sei $\mu \geq 0$. Berechnen Sie die singulären Zahlen der Matrix $T_\mu := \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass für $s \geq 1$ ein $\mu \geq 0$ existiert mit $s_0(T_\mu) = s$ und $s_1(T_\mu) = \frac{1}{s}$.
$s_{0,1}^2 = \nu \pm \sqrt{\nu^2 - 1}$ mit $\nu = 1 + \frac{\mu^2}{2}$.