TU DORTMUND WS 2012/13
PROF. DR. WINFRIED KABALLO
DR. MARTIN HEIDA

Funktionalanalysis II

Blatt 7

Abgabe: 4. Juni 2013, 14:00

Aufgabe 25 (1 Punkt)**.**
Der unitäre *beidseitige* Shift-Operator kann als Multiplikationsoperator $U = M_\zeta$ auf $H := L_2(S^1)$ realisiert werden.
a) Zeigen Sie: F?r $A \in L(H)$ gilt $AU = UA$ genau dann, wenn $A = M_\psi$ für eine Funktion $\psi \in L_\infty(S^1)$ gilt.
b) Geben Sie alle U *reduzierenden* Unterräume von H an, d. h. alle unter U und U^* invarianten Unterräume von H.

Aufgabe 26 (1 Punkt)**.**
Für $z \in \overline{D} \subseteq \mathbb{C}$ wird durch $\Delta(z) := \operatorname{diag}(1, z, z^2, \ldots, z^n, \ldots)$ ein Diagonaloperator auf ℓ_2 definiert. Zeigen Sie:
a) Es gilt $\Delta \in \mathcal{H}^\infty(D, K(\ell_2))$ und $\| \Delta(z) \| \leq 1$ für $z \in D$.
b) Für $0 < p < \infty$ und $z \in D$ gilt $\Delta(z) \in S_p(\ell_2)$. Ist $\sup_{z \in D} \sigma_p(D(z)) < \infty$?
c) Für $\zeta \in S^1$ und $x \in \ell_2$ gilt $\lim\limits_{r \to 1^-} \Delta(r\zeta)x = \Delta(\zeta)x$.
d) Der Operator $\Delta(\zeta)$ ist unitär für $\zeta \in S^1$. Existiert $\lim\limits_{r \to 1^-} \Delta(r\zeta)$ in der Operatornorm?
e) Es sei $A \in \Phi(\ell_2)$ mit $\| A \| < 1$. Zeigen Sie $A + \Delta(z) \in \Phi(\ell_2)$ für alle $z \in \overline{D}$ und berechnen Sie $\operatorname{ind}(A + \Delta(z))$ für $z \in \overline{D}$.
f) Berechnen Sie die Sprungstellenmenge $\Sigma(T) = \{\alpha_j\}_{j=1}^\infty$ der Fredholmfunktion $T(z) := \frac{1}{2}I - \Delta(z)$ in D. Gilt $\sum\limits_{j=1}^{\infty}(1 - |\, \alpha_j \,|) < \infty$?

Aufgabe 27 (1 Punkt)**.**
Es sei H ein Hilbertraum und $A = A^* \in L(H)$.
a) Zeiden Sie ohne Verwendung der Gelfand-Theorie

$$\|p(A)\| = \sup\{|p(\lambda)| \ : \ \lambda \in \sigma(A)\} \quad \text{für Polynome } p \in \mathbb{R}[\lambda]$$

b)Konstruieren Sie den stetigen Funktionalkalkül $\Psi : \ \mathcal{C}(\sigma(A)) \to L(H)$ mit Hilfe von a) und dem Weierstraßschen Approximationssatz.

Aufgabe 28 (1 Punkt)**.**
entfällt.