TU Dortmund
Prof. Dr. Winfried Kaballo
Dr. Martin Heida

WS 2012/13

Funktionalanalysis II
Blatt 8
Abgabe: 11. Juni 2013, 14:00

Aufgabe 29 (1 Punkt).
Es sei $\Psi : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ ein $*$-Homomorphismus zwischen C^*-Algebren mit $\Psi(e) = e$.
a) Zeigen Sie $\sigma(\Psi(a)) \subseteq \sigma(a)$ für $a \in \mathcal{C}$ und schließen Sie $\| \Psi(a) \|^2 = r(\Psi(a^*a)) \leq r(a^*a) = \| a \|^2$.
b) Nun sei $a \in \mathcal{C}$ normal. Zeigen Sie $f(\Psi(a)) = \Psi(f(a))$ für $f \in \mathcal{C}(\sigma(a))$.
c) Nun sei Ψ *injektiv*. Zeigen Sie $\sigma(\Psi(a)) = \sigma(a)$ für normale $a \in \mathcal{C}$, und schließen Sie, dass Ψ *isometrisch* ist.

Aufgabe 30 (1 Punkt).
Es sei $T \in L(\mathbb{C}^n)$ normal. Zeigen Sie die Äquivalenz von:
a) T hat einen zyklischen Vektor
b) T hat n verschiedene Eigenwerte
c) $\{T\}'$ ist kommutativ.

Aufgabe 31 (1 Punkt).
Es seien H ein Hilbertraum und $A = A^* \in L(H)$.
a) Nun sei $A \geq 0$. Zeigen Sie $\| Ax \|^2 \leq \| A \| \langle Ax|x \rangle$ für $x \in H$.
b) Es seien $A_n \in L(H)$ und $B \in L(H)$ selbstadjungierte Operatoren mit

$$A_1 \leq A_2 \leq \ldots \leq A_n \leq A_{n+1} \leq \ldots \leq B \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie die Existenz von $A := \lim_{n\to\infty} A_n$ in der starken Operatortopologie $L_\sigma(H)$ sowie $A = A^*$.

Aufgabe 32 (1 Punkt).
Sei $a = a^* \in \mathcal{A}$ und $a \in \mathcal{I}$ für ein abgeschlossenes Ideal $\mathcal{I}$ in $\mathcal{A}$. Sei $f \in C(\sigma(a))$ mit $f(0) = 0$. Zeige $f(a) \in \mathcal{I}$.