TU Dortmund
Prof. Dr. Winfried Kaballo
Dr. Martin Heida

WS 2012/13

Funktionalanalysis II
Blatt 10
Abgabe: 25. Juni 2013, 14:00

Aufgabe 37 (1 Punkt).
Zeigen Sie

$$\|f\|_{\Lambda^{\frac{1}{2}}} \leq C\|f\|_{W_2^1} \qquad \text{für } f \in \mathcal{C}^1[a,b]$$

und schließen Sie, dass der Sobolev-Raum $W_2^1(a,b)$ stetig in $\Lambda^{\frac{1}{2}}[a,b]$ und kompakt in $C[a,b]$ eingebettet ist.

Aufgabe 38 (1 Punkt).
Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und m das Lebesgue-Maß auf Ω. Zeigen Sie $W_m(f) = \overline{f(\Omega)}$ für eine stetige Funktion $f \in \mathcal{C}(\Omega)$. Besitzt M_f Eigenwerte?

Aufgabe 39 (1 Punkt).
Beweisen Sie die Aussagen c) auf S. 375 über den Zusammenhang der Mengen $\Phi_n(X)$ der Fredholmoperatoren vom Index $n \in \mathbb{Z}$, das heißt: Zeigen Sie, dass aus dem Zusammenhang von $GL(X)$ auch der von $\Phi_n(X)$ folgt, für $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 40 (1 Punkt).
Es seien T und S lineare Operatoren in einem Hilbertraum H.
a) Es gelte $\overline{D(T+S)} = H$. Zeigen Sie $T^* + S^* \subseteq (T+S)^*$. Wann gilt sogar Gleichheit?
b) Nun seien $D(T)$, $D(S)$ und $D(TS)$ dicht in H. Zeigen Sie $S^*T^* \subset (TS)^*$. Wann gilt sogar Gleichheit?