TU Dortmund WS 2012/13
Prof. Dr. Winfried Kaballo
Dr. Martin Heida

Funktionalanalysis II
Blatt 12
Abgabe: 9. Juli 2013, 14:00

Aufgabe 45 (1 Punkt)**.**
Es seien $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ Folgen positiver Zahlen mit $\sup_{k\geq 0}\frac{a_k}{b_k} < \infty$. Ferner sei

$$l_2(a) := \{(x_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \,:\, \|x\|_{2,a} < \infty\} \quad \|x\|_{2,a}^2 := \sum_{k\geq 0} a_k\, x_k^2$$

und $l_2(b)$ entsprechend. Zeigen Sie, das beschränkte Teilmengen von $l_2(b)$ genau dann in $l_2(a)$ relativ kompakt sind, wenn $\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k} = 0$ gilt.

Aufgabe 46 (1 Punkt)**.**
Verifizieren Sie die Vertauschung der Integrationsreihenfolge am Ende des Beweises von Satz 16.7.

Aufgabe 47 (1 Punkt)**.**
Es seien $\sigma \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen und $\sigma_p \subseteq \mathbb{R}$ eine beliebige Menge. Konstruieren Sie einen selbstadjungierten Operator A, so dass σ_p die Menge der Eigenwerte von A ist und $\sigma(A) = \sigma \cup \overline{\sigma_p}$.

Aufgabe 48 (1 Punkt)**.**
Für ein $n \in \mathbb{N}$ sei A_n ein symmetrischer Operator im Hilbertraum H_n. In $H := \oplus_2 H_n$ sei

$$A := \oplus_2 A_n \quad \text{mit} \quad D(A) := \{(x_1, \dots, x_r, 0, 0, \dots) \,:\, r \in \mathbb{N},\ x_j \in D(A_j)\}\,.$$

Zeigen Sie, dass A symmetrisch ist mit

$$\dim R(\pm iI - A)^\perp = \sum_n \dim R(\pm iI - A_n)^\perp\,.$$