VIII. Integralrechnung in mehreren Veränderlichen

55 Das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$

55.1 Flächeninhalte und Volumina. a) Für Zahlen $a_j \leq b_j$ in $\mathbb{R}$ ist durch

$$Q := \prod_{j=1}^{n} [a_j, b_j] \tag{1}$$

ein *Quader* in $\mathbb{R}^n$ gegeben. Sein *Lebesgue-Maß* wird definiert als

$$\lambda(Q) := \lambda^n(Q) := \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j)\,. \tag{2}$$

Im Fall $n = 2$ ist $\lambda^2(Q)$ der *Flächeninhalt* des Rechtecks Q, im Fall $n = 3$ ist $\lambda^3(Q)$ das (anschauliche) *Volumen* des Quaders Q.

b) Man möchte nun das Maß λ^n auf eine möglichst große Klasse $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$ von Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ fortsetzen; für $\lambda^n : \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ sollten dann die folgenden einleuchtenden Eigenschaften gelten:

(A1) Für Quader Q in $\mathbb{R}^n$ gilt Formel (2).

(A2) Für $M \in \mathfrak{M}$ und eine Translation $\tau : x \mapsto x + b$ des $\mathbb{R}^n$ gilt auch $\tau(M) \in \mathfrak{M}$ und $\lambda(\tau(M)) = \lambda(M)$.

(A3) Für $M \in \mathfrak{M}$ und eine Drehung oder Spiegelung ρ des $\mathbb{R}^n$ gilt auch $\rho(M) \in \mathfrak{M}$ und $\lambda(\rho(M)) = \lambda(M)$.

(A4) Für $M, N \in \mathfrak{M}$ gilt auch $M \cup N$, $M \cap N \in \mathfrak{M}$, und man hat

$$\lambda(M \cup N) + \lambda(M \cap N) = \lambda(M) + \lambda(N)\,.$$

c) Für $n \geq 3$ gibt es *keine* Abbildung $\lambda : \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n) \mapsto [0, \infty]$, die auf *allen* Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ definiert ist und (**A1**) - (**A4**) erfüllt. Das Lebesgue-Maß wird daher (in 55.5) nur auf gewissen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ erklärt; dort hat es dann die Eigenschaften (**A1**) - (**A4**), wobei (**A4**) sogar noch wesentlich verschärft werden kann (vgl. Satz 55.6).

55.2 Polygone. a) Liegen *rechtwinklige Dreiecke* T (mit den Seitenlängen a, b) in $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^2)$, so ergibt sich aus (**A1**) - (**A4**) sofort

$$\lambda(T) := \tfrac{1}{2}\, a\, b\,. \tag{3}$$

Für beliebige Dreiecke D mit einer Seite $s = s_1 + s_2$ und zugehöriger Höhe h erhält man daraus $\lambda(D) = \frac{1}{2}\, s_1\, h + \frac{1}{2}\, s_2\, h$, also

$$\lambda(D) \;=\; \tfrac{1}{2}\, s\, h\,. \tag{4}$$

b) *Polygone* $P \subseteq \mathbb{R}^2$ sind endliche Vereinigungen von Dreiecken. Man kann $P = \bigcup_{j=1}^{r} D_j$ als *disjunkte* Vereinigung von Dreiecken schreiben (Strecken sind entartete Dreiecke!) und setzt dann

$$\lambda(P) := \sum_{j=1}^{r} \lambda(D_j)\,. \tag{5}$$

Dieser Ausdruck ist von der *Wahl der Zerlegung* von P in disjunkte Dreiecke *unabhängig* und somit *wohldefiniert*, und der Flächeninhalt $\lambda : \mathfrak{Po} \mapsto [0,\infty)$ auf der Klasse $\mathfrak{Po}$ aller Polygone erfüllt die Eigenschaften (**A1**) - (**A4**). Ein Beweis dieser anschaulich einleuchtenden Tatsachen ist recht mühsam.

c) Allgemeinere Mengen $M \subseteq \mathbb{R}^2$ können durch Polygone einerseits *ausgeschöpft* und andererseits *eingegrenzt* werden; bereits Archimedes (287–212 v. Chr.) konnte so Flächeninhalte berechnen.

55.3 Äußeres Maß. a) Zur Konstruktion des Lebesgue-Maßes benutzt man Eingrenzungen und Ausschöpfungen durch *Folgen von Quadern.* Die Verwendung nur *endlich* vieler Quader würde eine weniger leistungsfähige Theorie ergeben.

b) Wegen $\mathbb{R}^n \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} [-k,k]^n$ gibt es zu jeder Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Folgen $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Quadern mit $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$. Die Zahl

$$\lambda_*(A) := \lambda_*^n(A) := \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(Q_k) \mid A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k\} \in [0,\infty] \tag{6}$$

heißt dann *äußeres Maß* von A .

c) Das äußere Maß ist *subadditiv:* Für eine Folge (A_j) von Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ und $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ gilt

$$\lambda_*(A) \;\le\; \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_*(A_j)\,. \tag{7}$$

55.4 Nullmengen. a) Eine Menge $N \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *Nullmenge,* $N \in \mathfrak{N}(\mathbb{R}^n)$, falls $\lambda_*(N) = 0$ gilt. Dazu ist äquivalent, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Folge (Q_k) von Quadern mit $N \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(Q_k) < \varepsilon$ gibt.

b) Für eine Folge (N_j) in $\mathfrak{N}(\mathbb{R}^n)$ und $N \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} N_j$ ist nach (7) auch $N \in \mathfrak{N}(\mathbb{R}^n)$.

c) Eine Menge A heißt *abzählbar,* wenn es eine Folge $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in A gibt mit $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{a_j\}$. Äquivalent dazu ist die Existenz einer Surjektion $f : \mathbb{N} \mapsto A$. Nach b) sind also abzählbare Mengen in $\mathbb{R}^n$ stets Nullmengen. Allgemeiner sind *abzählbare Vereinigungen* von Nullmengen wieder Nullmengen.

d) Die Menge $\mathbb{Q}$ der *rationalen* Zahlen ist abzählbar, die Menge $\mathbb{R}$ dagegen nicht.

e) (Achsenparallele) Geraden in $\mathbb{R}^2$ sind zweidimensionale Nullmengen. Allgemeiner gilt $\mathbb{R}_{n-1} := \{(x',0) \mid x' \in \mathbb{R}^{n-1}\} \in \mathfrak{N}(\mathbb{R}^n)$.

f) Es seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f \in \mathcal{C}^1(D,\mathbb{R}^n)$. Für eine Nullmenge $N \subseteq D$ ist dann auch $f(N)$ eine Nullmenge in $\mathbb{R}^n$. Dies gilt i. a. *nicht,* wenn $f : N \mapsto \mathbb{R}^n$ nur *stetig* ist (vgl. 49.1 d)).

g) Nach e) und f) sind die Bahnen von $\mathcal{C}^1$-Wegen für $n \geq 2$ Nullmengen im $\mathbb{R}^n$, entsprechend *Flächen* Nullmengen im $\mathbb{R}^3$ usw.

Das äußere Maß ist *nicht additiv* auf der Potenzmenge $\mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$. Man definiert daher (vgl. **(A4)**):

55.5 Definition. *Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt* **Lebesgue-meßbar,** $M \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$, *falls für alle Quader in $\mathbb{R}^n$ gilt:*

$$\lambda(Q) \;=\; \lambda_*(Q \cap M) + \lambda_*(Q \backslash M)\,. \tag{8}$$

Für $M \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$ wird das **Lebesgue-Maß** *durch $\lambda(M) := \lambda^n(M) := \lambda_*(M)$ definiert.*

55.6 Theorem. *a) Das System $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$ ist eine σ*-**Algebra,** *d. h. es hat die folgenden Eigenschaften:*

(α) $\mathbb{R}^n \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$,

(β) $A \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow A^c = \mathbb{R}^n \backslash A \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$,

(γ) $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow A := \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$.

b) Das Lebesgue-Maß $\lambda = \lambda^n : \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n) \mapsto [0,\infty]$ ist σ-**additiv,** *d.h. für eine* disjunkte *Folge $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$ und $A := \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ gilt*

$$\lambda(A) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k)\,. \tag{9}$$

55.7 Theorem. *a) Für das Lebesgue-Maß $\lambda = \lambda^n : \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n) \mapsto [0,\infty]$ gelten die Eigenschaften (***A1***) - (***A4***).*

b) Offene und abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ sind meßbar.

c) Zu $A \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$ und $\varepsilon > 0$ gibt es eine offene Menge U und eine abgeschlossene Menge C mit $C \subseteq A \subseteq U$ und $\lambda(U\backslash C) < \varepsilon$.

55.8 Beispiel (Vitali). Durch $x \sim y := x - y \in \mathbb{Q}$ wird eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$ definiert. Es sei $E \subseteq [0,1]$ eine Menge, die aus jeder Äquivalenzklasse genau ein Element enthält. Dann gilt

$$[0,1] \;\subseteq\; \bigcup\{E + r \mid r \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]\} \;\subseteq\; [-1,2]\,, \tag{10}$$

wobei die Vereinigung *abzählbar* und *disjunkt* ist. Nach **(A2)** folgt aus $E \in \mathfrak{M}(\mathbb{R})$ auch $E + r \in \mathfrak{M}(\mathbb{R})$ und $\lambda(E+r) = \lambda(E)$ für alle $r \in \mathbb{Q}$, aus (9) und (10) also

$$1 \;\leq\; \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(E) \;\leq\; 3\,.$$

Dies ist sowohl für $\lambda(E) = 0$ als auch für $\lambda(E) > 0$ unmöglich, und somit kann E nicht Lebesgue-meßbar sein.