IX. Integralsätze

60 Wegintegrale und Potentiale

60.1 Motivation. Bei der Verschiebung eines Massenpunktes um einen Vektor $h \in \mathbb{R}^n$ (hier $n = 2$ oder $n = 3$) in einem konstanten *Kraftfeld* K wird die *Arbeit* $A = \langle K, h \rangle$ geleistet. Wird der Massenpunkt in einem ortsabhängigen Kraftfeld $K : D \mapsto \mathbb{R}^n$ längs eines Weges $\gamma : [a, b] \mapsto D$ verschoben, so kann die geleistete Arbeit mittels Zerlegungen

$$Z = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_r = b\} \quad \text{von} \quad [a, b] \tag{1}$$

durch den Ausdruck

$$\begin{aligned} A &\sim \sum_{k=1}^{r} \langle K(\gamma(t_{k-1})), \gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}) \rangle \\ &\sim \sum_{k=1}^{r} \langle K(\gamma(t_{k-1})), \dot\gamma(t_{k-1}) \rangle \, (t_k - t_{k-1}) \end{aligned} \tag{2}$$

approximiert werden. Ersetzt man die letzte Summe durch das entsprechende Integral, so erhält man die folgende Definition 60.3 eines Wegintegrals.

60.2 Wege. a) Ein Weg $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^n$ heißt *stückweise stetig differenzierbar,* wenn eine Zerlegung (1) mit $\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]} \in \mathcal{C}^1([t_{k-1}, t_k], \mathbb{R}^n)$ für $k = 1, \ldots, r$ existiert, Notation: $\gamma \in \mathcal{C}^1_{st}([a, b], \mathbb{R}^n)$. Ein Weg γ ist genau dann stückweise $\mathcal{C}^1$, wenn er eine endliche *Summe* von $\mathcal{C}^1$-Wegen ist; für einen Weg $\varphi : [b, c] \mapsto \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(b) = \gamma(b)$ wird der Weg $\gamma + \varphi : [a, c] \mapsto \mathbb{R}^n$ erklärt durch

$$(\gamma + \varphi)(t) := \begin{cases} \gamma(t) & , \quad a \le t \le b \\ \varphi(t) & , \quad b \le t \le c \end{cases} . \tag{3}$$

Für $\mathcal{C}^1_{st}$-Wege hat man den folgenden *Äquivalenzbegriff* (vgl. 49.4 für $\mathcal{C}^1$-Wege):

b) Eine streng monoton wachsende Bijektion $\alpha : [a, b] \mapsto [c, d]$ heißt *(orientierungserhaltende) Parametertransformation (oPT),* wenn sowohl $\alpha \in \mathcal{C}^1_{st}([a, b], \mathbb{R})$ als auch $\alpha^{-1} \in \mathcal{C}^1_{st}([c, d], \mathbb{R})$ gilt.

c) Zwei $\mathcal{C}^1_{st}$-Wege $\gamma_1 : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^n$ und $\gamma_2 : [c, d] \mapsto \mathbb{R}^n$ heißen *äquivalent,* Notation: $\gamma_1 \sim \gamma_2$, falls $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \alpha$ für eine oPT $\alpha : [a, b] \mapsto [c, d]$ gilt.

d) In c) wird tatsächlich eine *Äquivalenzrelation* erklärt. Äquivalente Wege durchlaufen die gleiche *Bahn* oder *Kurve* $(\gamma_1) = (\gamma_2)$, und zwar in der *gleichen Richtung,* da α streng monoton *wächst.*

60.3 Definition. *Für einen Weg* $\gamma \in \mathcal{C}^1_{st}([a,b],\mathbb{R}^n)$ *und ein stetiges Vektorfeld* $v \in \mathcal{C}((\gamma),\mathbb{R}^n)$ *wird durch*

$$\textstyle\int_\gamma \langle\, v(x), dx \,\rangle := \int_a^b \langle\, v(\gamma(t)), \dot\gamma(t) \,\rangle \, dt \in \mathbb{R} \tag{4}$$

das Wegintegral *von* v *über* γ *erklärt.*

60.4 Bemerkungen. a) Aus der Substitutionsregel ergibt sich sofort $\int_{\gamma_1} \langle\, v(x), dx \,\rangle = \int_{\gamma_2} \langle\, v(x), dx \,\rangle$ für äquivalente $\mathcal{C}^1_{st}$-Wege $\gamma_1 \sim \gamma_2$.

b) Für den *in umgekehrter Richtung* durchlaufenen Weg (vgl. (49.7))

$$-\gamma : [a,b] \mapsto \mathbb{R}^n\,, \quad -\gamma(t) := \gamma(a+b-t)\,, \tag{5}$$

gilt $\frac{d}{dt}(-\gamma)(t) = -\dot\gamma(a+b-t)$ und daher $\int_{-\gamma} \langle\, v(x), dx \,\rangle = -\int_\gamma \langle\, v(x), dx \,\rangle$.

c) Man hat $\int_{\gamma+\varphi} \langle\, v(x), dx \,\rangle = \int_\gamma \langle\, v(x), dx \,\rangle + \int_\varphi \langle\, v(x), dx \,\rangle$ für eine Summe von Wegen wie in (3).

60.5 Potentiale. a) Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Ein Vektorfeld $v \in \mathcal{C}(D,\mathbb{R}^n)$ besitzt ein *Potential* $g \in \mathcal{C}^1(D,\mathbb{R})$, falls $v = \operatorname{grad} g$ gilt.

b) Nach Folgerung 50.15 sind über *Gebieten* D Potentiale bis auf additive Konstanten eindeutig bestimmt.

c) Die Bezeichnung *„Potential"* für g ist physikalisch motiviert, man denke etwa an ein *(konservatives) Kraftfeld* oder ein *elektrostatisches Feld* v. In der Physik wird allerdings meist $-g$ als Potential von v bezeichnet.

60.6 Zentralkraftfelder. Ein *Zentralkraftfeld* auf $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ ist gegeben durch $v(x) = f(r)\,x$ mit dem Radius $r = |\,x\,|$ und einer Funktion $f \in \mathcal{C}(0,\infty)$. Ist nun $g \in \mathcal{C}^1(0,\infty)$ eine Stammfunktion der Funktion $r \mapsto r\,f(r)$ der einen Veränderlichen r, so gilt aufgrund von (50.7)

$$\operatorname{grad} g(r) \;=\; \tfrac{g'(r)}{r} \cdot x \;=\; f(r)\,x \;=\; v(x)\,, \quad x \neq 0\,. \tag{6}$$

Speziell besitzt das *Gravitationsfeld* $v(x) = -\frac{\gamma M}{r^3}\,x$ eines Massenpunktes der Masse M im Nullpunkt des $\mathbb{R}^3$ das *Potential* $g(r) = \frac{\gamma M}{r}$.

60.7 Wegintegrale von Gradientenfeldern. a) Es seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, und $v \in \mathcal{C}(D,\mathbb{R}^n)$ besitzte ein *Potential* $g \in \mathcal{C}^1(D,\mathbb{R})$. Für einen $\mathcal{C}^1_{st}$-Weg γ in D gilt dann aufgrund der Kettenregel

$$\begin{aligned} \textstyle\int_\gamma \langle\, v(x), dx \,\rangle &= \textstyle\int_a^b \langle\, v(\gamma(t)), \dot\gamma(t) \,\rangle \, dt \;=\; \int_a^b \langle\, \operatorname{grad} g(\gamma(t)), \dot\gamma(t) \,\rangle \, dt \\ &= \textstyle\int_a^b \frac{d}{dt}(g\circ\gamma)(t)\, dt \;=\; g(\gamma(b)) - g(\gamma(a))\,, \quad \text{also} \\ \textstyle\int_\gamma \langle\, v(x), dx \,\rangle &= g(\gamma^E) - g(\gamma^A)\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Diese Aussage kann als Erweiterung des eindimensionalen Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung interpretiert werden (vgl. auch 61.6).

b) *Wegintegrale von* v *hängen* also *nur* von den *Anfangs-* und *Endpunkten*

$$\gamma^A := \gamma(a) \quad \text{und} \quad \gamma^E := \gamma(b) \tag{8}$$

der Wege $\gamma : [a,b] \mapsto \mathbb{R}^n$ *ab!* Umgekehrt *impliziert diese Eigenschaft die Existenz eines Potentials* (γ heißt geschlossen, wenn $\gamma^E = \gamma^A$ ist):

60.8 Satz. *Für ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^n$ und ein stetiges Vektorfeld $v \in \mathcal{C}(G, \mathbb{R}^n)$ sind äquivalent:*

(a) Es ist $v = \operatorname{grad} g$ für ein Potential $g \in \mathcal{C}^1(G, \mathbb{R})$.

(b) Es ist $\int_\gamma \langle v(x), dx \rangle = 0$ für jeden geschlossenen *$\mathcal{C}^1_{st}$-Weg γ in G.*

(c) Es ist $\int_{\gamma_0} \langle v(x), dx \rangle = \int_{\gamma_1} \langle v(x), dx \rangle$ für $\mathcal{C}^1_{st}$-Wege γ_0, γ_1 in G mit $\gamma_0^A = \gamma_1^A$ und $\gamma_0^E = \gamma_1^E$.

Für $\mathcal{C}^1$-Vektorfelder hat man die folgende *notwendige* Bedingung für die Existenz eines Potentials:

60.9 Satz. *Besitzt ein Vektorfeld $v \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R}^n)$ ein Potential, so gilt*

$$\partial_i v_j - \partial_j v_i \;=\; 0 \quad \text{für } 1 \le i\,,\, j \le n\,. \tag{9}$$

Beweis. Aus $v = \operatorname{grad} g$ folgt $g \in \mathcal{C}^2(D, \mathbb{R})$ und dann aufgrund des Satzes von Schwarz sofort $\partial_i v_j = \partial_i \partial_j g = \partial_j \partial_i g = \partial_j v_i$, also (9).

60.10 Beispiele und Bemerkungen. a) Ein Vektorfeld $v \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R}^n)$ besitzt genau dann ein Potential, wenn die n Gleichungen

$$\partial_1 g = v_1\,,\ \ldots\,,\ \partial_n g = v_n \tag{10}$$

für *eine* unbekannte Funktion g lösbar sind; *notwendig* dafür ist also die Gültigkeit der $\frac{n\,(n-1)}{2}$ *Integrabilitätsbedingungen* (9). Vektorfelder, die diese erfüllen, heißen *wirbelfrei.* Offenbar ist Wirbelfreiheit dazu äquivalent, daß alle Funktionalmatrizen $Dv(x)$ *symmetrisch* sind. Sie ist jedoch i. a. *nicht hinreichend* für die Existenz eines Potentials, d. h. die Umkehrung von Satz 60.9 ist i. a. nicht richtig:

b) Das Vektorfeld $v(x, y) := \frac{1}{x^2+y^2}\,(-y, x)^\top$ ist wirbelfrei auf $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ wegen

$$\frac{\partial}{\partial y}\,\frac{-y}{x^2+y^2} \;=\; \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \;=\; \frac{\partial}{\partial x}\,\frac{x}{x^2+y^2}\,.$$

Für den geschlossenen Weg $\gamma : [-\pi, \pi] \mapsto \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, $\gamma(t) := (\cos t, \sin t)^\top$, gilt

$$\langle\, v(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\,\rangle \;=\; \langle\, (-\sin t, \cos t)^\top, (-\sin t, \cos t)^\top\,\rangle \;=\; 1$$

und daher

$$\int_\gamma \langle\, v(x), dx\,\rangle \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} \langle\, v(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\,\rangle\, dt = 2\pi\,.$$

Somit kann v kein Potential auf $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ besitzen.

Die Umkehrung von Satz 60.9 gilt über *sternförmigen* Gebieten (vgl. 48.22 c)):

60.11 Theorem. *Es seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein bezüglich $a \in D$ sternförmiges Gebiet und $v \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R}^n)$ ein wirbelfreies Vektorfeld. Dann besitzt v ein Potential $g \in \mathcal{C}^2(D, \mathbb{R})$.*

Beweis. Man kann $a = 0$ annehmen und definiert $g : D \mapsto \mathbb{R}$ durch

$$g(x) :=\ \int_0^1 \langle\, v(tx), x\,\rangle\, dt \;=\; \sum_{j=1}^{n} \Big(\int_0^1 v_j\,(t\,x)\, dt \Big)\, x_j\,; \tag{11}$$

wegen $[0, x] \subseteq D$ ist dies möglich. Wegen (9) gilt dann tatsächlich $\operatorname{grad} g = v$.

60.12 Beispiel. Für das Vektorfeld $v(x,y) := (2xy + y^3, x^2 + 3xy^2)^\top$ auf $\mathbb{R}^2$ gilt $\frac{\partial}{\partial y}(2xy + y^3) = 2x + 3y^2 = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 3xy^2)$; v ist also wirbelfrei. Mit (11) erhält man ein Potential durch

$$\begin{aligned} g(x,y) &= \textstyle\int_0^1 v_1(t\,x, ty)\,dt \cdot x + \int_0^1 v_2(t\,x, ty)\,dt \cdot y \\ &= \textstyle\int_0^1 (2t^2xy + t^3y^3)\,dt \cdot x + \int_0^1 (t^2x^2 + 3t^3xy^2)\,dt \cdot y \\ &= \tfrac{2}{3}x^2y + \tfrac{1}{4}xy^3 + \tfrac{1}{3}x^2y + \tfrac{3}{4}xy^3 \;=\; x^2y + xy^3\,. \end{aligned}$$

60.13 Bemerkungen. Theorem 60.11 gilt allgemeiner über *einfach zusammenhängenden* Gebieten $D \subseteq \mathbb{R}^n$, d. h. Gebieten, in denen jeder geschlossene Weg „stetig auf einen Punkt deformiert“ werden kann, vgl. dazu auch 61.10 c).

Schließlich werden noch *Divergenz* und *Rotation* eines Vektorfeldes eingeführt:

60.14 Definition. *Es sei* $v \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R}^n)$ *ein Vektorfeld.*

a) Die skalare Funktion $\operatorname{div} v := \sum_{j=1}^{n} \partial_j v_j$ *heißt* Divergenz *von* v.

b) Das Vektorfeld $\operatorname{rot} v := (\partial_2 v_3 - \partial_3 v_2, \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3, \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1)^\top$ *heißt im Fall* $n = 3$ *die* Rotation *von* v.

60.15 Beispiele und Bemerkungen. a) Die Operatoren grad, div und rot können mittels des *„Nabla-Operators“* $\nabla := (\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n)^\top$ symbolisch so geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f &= \nabla f && \text{(Skalarmultiplikation),} && (12) \\ \operatorname{div} v &= \langle \nabla, v \rangle && \text{(Skalarprodukt) und} && (13) \\ \operatorname{rot} v &= \nabla \times v && \text{(Vektorprodukt).} && (14) \end{aligned}$$

b) Im Fall $n = 3$ gilt genau dann $\operatorname{rot} v = 0$, wenn v *wirbelfrei* ist. Allgemein ist $\operatorname{rot} v$ ein Maß für die *„Wirbelstärke* oder *-dichte“* von v. Ist beispielsweise $v(x) := a \times x$ für ein $a \in \mathbb{R}^3$, so berechnet man leicht $\operatorname{rot} v = 2a$.

c) Analog zu b) ist $\operatorname{div} v$ ein Maß für die *„Quellenstärke* oder *-dichte“* von v. In dem folgenden Beispiel ist in der Tat ρ die „Quelle“ des Feldes ϵE:

d) Ein *elektrostatisches* $\mathcal{C}^1$*-Feld* E in einem homogenen Medium des Raumes $\mathbb{R}^3$ erfüllt die *Maxwell-Gleichungen*

$$\operatorname{rot} E \;=\; 0\,, \quad \operatorname{div}(\epsilon\, E) \;=\; \rho\,, \tag{15}$$

wobei ρ die skalare *elektrische Ladungsdichte* und ϵ die Dielektrizitätskonstante ist. Nach Satz 60.9 besitzt E über sternförmigen Gebieten ein *Potential* V; für dieses ergibt sich die *Potentialgleichung*

$$\Delta V \;=\; \operatorname{div} \operatorname{grad} V \;=\; \tfrac{\rho}{\epsilon}\,, \tag{16}$$

wobei $\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad} = \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2$ der Laplace-Operator ist (vgl. 51.6).