61 Integralsätze in der Ebene

61.1 Wegintegrale skalarer Funktionen. a) Für einen Weg $\gamma \in \mathcal{C}^1_{st}([a,b],\mathbb{R}^n)$ und eine stetige Funktion $f \in \mathcal{C}((\gamma))$ wird durch

$$\int_\gamma f\,ds := \int_\gamma f(x)\,ds(x) := \int_a^b f(\gamma(t))\,|\,\dot\gamma(t)\,|\,dt \tag{1}$$

das *Wegintegral* von f über γ erklärt. Dies kann ähnlich wie in 60.1 motiviert werden.

b) Man hat $\int_{-\gamma} f\,ds = \int_\gamma f\,ds$; das in (1) definierte Wegintegral ist also von der *Orientierung* von γ *unabhängig.*

c) Aus der Substitutionsregel ergibt sich sofort $\int_{\gamma_1} f\,ds = \int_{\gamma_2} f\,ds$ für äquivalente $\mathcal{C}^1_{st}$-Wege $\gamma_1 \sim \gamma_2$.

d) Die *Länge* des Weges γ (vgl. Abschnitt 49) ist gegeben durch

$$\mathsf{L}(\gamma) = \int_a^b |\,\dot\gamma(t)\,|\,dt = \int_\gamma 1\,ds\,. \tag{2}$$

61.2 Kurven. a) Unter einer „Kurve" in $\mathbb{R}^n$ verstehen wir bisher die Spur eines stetigen Weges. Im folgenden betrachten wir nur noch spezielle Kurven, über die wir integrieren können.

b) Ein *injektiver* Weg $\gamma : [a,b] \mapsto \mathbb{R}^n$ heißt *Jordanweg.* Eine Kurve $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *Jordankurve,* falls ein Jordanweg γ mit $\Gamma = (\gamma)$ existiert. γ heißt dann *Jordan-Parametrisierung* oder *Jordan-Parameterdarstellung* (JPD) von Γ.

c) Es seien $\gamma_1 : [a,b] \mapsto \Gamma$ und $\gamma_2 : [c,d] \mapsto \Gamma$ JPDs der Jordankurve $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$\alpha := \gamma_2^{-1} \circ \gamma_1 : [a,b] \mapsto [c,d] \tag{3}$$

bijektiv und wegen Theorem 48.20 auch *stetig,* also *streng monoton.* Offenbar gilt $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \alpha$.

d) Ein Weg $\gamma \in \mathcal{C}^1_{st}([a,b],\mathbb{R}^n)$ heißt *stückweise glatt,* wenn für alle (auch einseitigen) Ableitungen stets $\dot\gamma(t) \neq 0$ gilt.

e) Sind in der Situation von c) γ_1 und γ_2 stückweise glatt, so gilt dies auch für α und α^{-1}; folglich gilt $\gamma_2 \sim \gamma_1$ oder $\gamma_2 \sim -\gamma_1$. Für eine stückweise glatte Jordankurve $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ gibt es also genau *zwei Äquivalenzklassen* stückweise glatter JPDs; jede dieser Äquivalenzklassen heißt eine *Orientierung* von Γ. Induziert γ eine dieser Orientierungen, so induziert $-\gamma$ die andere.

f) Ein Weg $\gamma : [a,b] \mapsto \mathbb{R}^n$ heißt *geschlossener Jordanweg,* falls $\gamma|_{[a,b)}$ injektiv ist und $\gamma(b) = \gamma(a)$ gilt. Eine Kurve $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *geschlossene Jordankurve,* falls ein geschlossener Jordanweg γ mit $\Gamma = (\gamma)$ existiert; γ heißt dann *Jordan-Parametrisierung* oder *Jordan-Parameterdarstellung* (JPD) von Γ. Für geschlossene Jordankurven gelten die Aussagen c)–e) entsprechend.

g) Unter **„Kurve"** verstehen wir im folgenden stets eine stückweise glatte [geschlossene] Jordankurve; Parametrisierungen sind stets stückweise glatte Jordan-Parametrisierungen.

61.3 Kurvenintegrale skalarer Funktionen. a) Für eine Kurve $\Gamma = (\gamma) \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f \in \mathcal{C}(\Gamma)$ wird durch

$$\int_\Gamma f\,ds := \int_\Gamma f(x)\,ds(x) := \int_\gamma f(x)\,ds(x) \tag{4}$$

das *Kurvenintegral* von f über Γ definiert.

b) Nach 61.2 e) und 61.1 b) *hängt* die rechte Seite von (4) *nicht von der Wahl der JPD* γ *ab;* das Kurvenintegral ist also wohldefiniert.

c) Es ist $\mathsf{L}(\Gamma) := \int_\Gamma 1\,ds = \mathsf{L}(\gamma)$ die *Länge* der Kurve Γ, und $\frac{1}{\mathsf{L}(\Gamma)} \int_\Gamma f\,ds$ ist der *Mittelwert* der Funktion f über Γ.

d) Mit den *Tangenteneinheitsvektoren* $\mathfrak{t}(\gamma(t)) = \frac{\dot\gamma(t)}{|\dot\gamma(t)|}$ (bis auf endlich viele t) von γ gilt $\dot\gamma(t) = |\dot\gamma(t)|\,\mathfrak{t}(\gamma(t))$. Für ein Vektorfeld $v \in \mathcal{C}(\Gamma, \mathbb{R}^n)$ folgt daher

$$\int_\gamma \langle v(x), dx \rangle \;=\; \int_a^b \langle v(\gamma(t)), \dot\gamma(t) \rangle\,dt \;=\; \int_\Gamma \langle v, \mathfrak{t} \rangle\,ds \tag{5}$$

aus (60.4), (1) und (4). Man beachte, daß bei Änderung der Orientierung γ durch $-\gamma$ und $\mathfrak{t}$ durch $-\mathfrak{t}$ ersetzt werden.

e) Es ist $\kappa_r : [-\pi, \pi] \mapsto \mathbb{R}^2$, $\kappa_r(t) = r\,(\cos t, \sin t)^\top$ JPD der Kreislinie C_r um 0. Für $f \in \mathcal{C}(C_r)$ gilt

$$\int_{C_r} f\,ds \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} f(r\cos t, r\sin t)\,r\,dt\,. \tag{6}$$

Weiter ist $\mathfrak{t}(\kappa_r(t)) = (-\sin t, \cos t)^\top$. Für das Vektorfeld $v(x,y) := (2x, y)^\top$ etwa gilt

$$\langle v, \mathfrak{t} \rangle \;=\; -2r\,\cos t\,\sin t + r\,\cos t\,\sin t \;=\; -r\,\cos t\,\sin t\,, \quad \text{also}$$

$$\int_{C_r} \langle v, \mathfrak{t} \rangle\,ds \;=\; -r\int_{-\pi}^{\pi} \cos t\,\sin t\,r\,dt \;=\; 0\,.$$

In der Tat verschwindet die linke Seite von (5) auch deshalb, weil das Vektorfeld v das Potential $g(x,y) = x^2 + \frac{1}{2}\,y^2$ hat.

61.4 Gebiete mit stückweise glattem Rand. Eine beschränkte offene Menge $G \subseteq \mathbb{R}^2$ besitzt einen *stückweise glatten Rand,* Notation: $G \in \mathfrak{G}_{st}(\mathbb{R}^2)$, wenn folgendes gilt:

(a) Es ist $\partial G = \bigcup\limits_{\ell=1}^{m} \Gamma_\ell$ eine endliche disjunkte Vereinigung geschlossener Kurven.

(b) Zu $q \in \partial G$ gibt es ein Koordinatensystem (ξ, η) des $\mathbb{R}^2$, in dem $q = (0,0)$ ist, ein offenes Rechteck $R := (a,b) \times (c,d) \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $q = (0,0) \in R$ und eine Funktion $h \in \mathcal{C}^1_{st}((a,b), \mathbb{R})$ mit $h(a,b) \subseteq (c,d)$ und

$$G \cap R \;=\; \{(\xi,\eta) \in R \mid \eta < h(\xi)\} \tag{7}$$

$$\partial G \cap R \;=\; \{(\xi,\eta) \in R \mid \eta = h(\xi)\}\,. \tag{8}$$

61.5 Beispiele, Bemerkungen und Definitionen. a) Beispiele für Gebiete mit stückweise glattem Rand sind etwa Kreise, Kreisringe, Ovale, Ellipsen, Dreiecke, Rechtecke oder auch das Innere schlichter Bereiche (vgl. 57.6), die über kompakten Intervallen mittels $\mathcal{C}^1_{st}$-Funktionen definiert sind.

b) Die Menge $G := K_2(0) \backslash ([-1,1] \times \{0\})$ liegt nicht in $\mathfrak{G}_{st}(\mathbb{R}^2)$; auf der Randkomponente $[-1,1] \times \{0\}$ ist Bedingung 61.4 (b) nicht erfüllt.

c) Außerhalb endlich vieler Punkte sind die Tangenten an ∂G wohldefiniert. In der Situation von 61.4 (b) ist für solche Punkte $p \in \partial G \cap R$

$$\mathfrak{n}(p) := \mathfrak{n}_a(p) := \frac{(-h'(\xi), 1)^\top}{\sqrt{1 + h'(\xi)^2}} \tag{9}$$

ein Normalenvektor der Länge 1 an ∂G im Punkte p, und zwar der *äußere Normalen(einheits)vektor.* Für $G \in \mathfrak{G}_{st}(\mathbb{R}^2)$ ist also auf ∂G außerhalb endlich vieler Punkte das stetige äußere Normalen(einheits)vektorfeld $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_a$ definiert.

d) Für $G \in \mathfrak{G}_{st}(\mathbb{R}^2)$ wird das *Kurvenintegral* einer Funktion $f \in \mathcal{C}(\partial G)$ über ∂G definiert durch

$$\int_{\partial G} f\, ds := \sum_{\ell=1}^{m} \int_{\Gamma_\ell} f\, ds\,. \tag{10}$$

Die folgende wichtige Aussage kann als Erweiterung des eindimensionalen Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung interpretiert werden:

61.6 Theorem (Integralsatz von Gauß). *Es seien $G \in \mathfrak{G}_{st}(\mathbb{R}^2)$ und $v \in \mathcal{C}(\overline{G}, \mathbb{R}^2)$ ein stetiges Vektorfeld mit $v|_G \in \mathcal{C}^1(G, \mathbb{R}^2)$, so daß $\operatorname{div} v \in \mathcal{L}_1(G)$ ist. Dann gilt*

$$\int_G \operatorname{div} v(x,y)\, d^2(x,y) \;=\; \int_{\partial G} \langle\, v, \mathfrak{n}_a \,\rangle\, ds\,. \tag{11}$$

61.7 Bemerkungen. a) Die Bedingungen von Theorem 61.6 sind insbesondere dann erfüllt, wenn v auf einer offenen Umgebung von $\overline{G}$ definiert und dort $\mathcal{C}^1$ ist.

b) Beweis für diesen Spezialfall über Bereichen, die bzgl. beider Koordinaten schlicht sind, z. B. für Rechtecke oder Kreise.

61.8 Umformulierung. In der Situation des Gaußschen Integralsatzes seien $v = (P, Q)^\top$ und $w := D_{-\pi/2}\, v = (Q, -P)^\top$ das „um den Winkel $-\frac{\pi}{2}$ gedrehte" Vektorfeld. Dann gelten

$$\operatorname{div} w \;=\; \tfrac{\partial Q}{\partial x} - \tfrac{\partial P}{\partial y} \quad \text{und} \tag{12}$$

$$\langle\, w, \mathfrak{n} \,\rangle \;=\; Q\mathfrak{n}_1 - P\mathfrak{n}_2 \;=\; P\mathfrak{t}_1 + Q\mathfrak{t}_2 \;=\; \langle\, v, \mathfrak{t} \,\rangle \quad \text{mit} \tag{13}$$

$$\mathfrak{t} \;:=\; D_{\pi/2}\, \mathfrak{n} := \; (-\mathfrak{n}_2, \mathfrak{n}_1)^\top\,; \tag{14}$$

es ist $\mathfrak{t}(p)$ der „um den Winkel $+\frac{\pi}{2}$ gedrehte" Normalenvektor $\mathfrak{n}(p)$, also ein *Tangenteneinheitsvektor* an ∂G. Offenbar liefert $\mathfrak{t}$ eine *Orientierung* von ∂G, für die die offene Menge G „links umlaufen" wird. Faßt man noch $v(x,y,z) := (P(x,y), Q(x,y), 0)^\top$ als Vektorfeld über $U \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^3$ auf, so ist $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = (\operatorname{rot} v)_3$ die z-Komponente der *Rotation* von v. Damit erhält man die folgende Umformulierung des Gaußschen Integralsatzes:

61.9 Satz (Integralsatz von Green). *Es sei $G \in \mathfrak{G}_{st}(\mathbb{R}^2)$, und ∂G sei durch $\mathfrak{t} = D_{\pi/2}\, \mathfrak{n}_a$ orientiert. Weiter seien $v \in \mathcal{C}(\overline{G}, \mathbb{R}^2)$ ein stetiges Vektorfeld mit $v|_G \in \mathcal{C}^1(G, \mathbb{R}^2)$, so daß $(\operatorname{rot} v)_3 \in \mathcal{L}_1(G)$ ist. Dann gilt*

$$\int_G (\operatorname{rot} v)_3(x,y)\, d^2(x,y) \;=\; \int_{\partial G} \langle\, v, \mathfrak{t} \,\rangle\, ds\,. \tag{15}$$

61.10 Veranschaulichung der Operationen *„Divergenz" und „Rotation"*:

a) Es sei $v \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R}^2)$ das *Geschwindigkeitsfeld* einer inkompressiblen *Strömung* konstanter Dichte $\rho = 1$ auf einer offenen Menge $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Für ein Gebiet $G \in \mathfrak{G}_{st}(\mathbb{R}^2)$ mit $\overline{G} \subseteq D$ ist dann $\int_{\partial G} \langle v, \mathfrak{n}_a \rangle \, ds$ der *Fluß* von v durch den Rand ∂G pro Zeiteinheit, $\frac{1}{m(G)} \int_{\partial G} \langle v, \mathfrak{n}_a \rangle \, ds$ also die *mittlere Ergiebigkeit* von v in G. Ist (G_k) eine Folge von solchen Gebieten in D mit $(x_0, y_0) \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} G_k$ und $\Delta(G_k) \to 0$ für ihre Durchmesser, so folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{div} v(x_0, y_0) &= \lim_{k \to \infty} \tfrac{1}{m(G_k)} \int_{G_k} \operatorname{div} v(x, y) \, d^2(x, y) \\ &= \lim_{k \to \infty} \tfrac{1}{m(G_k)} \int_{\partial G} \langle v, \mathfrak{n}_a \rangle (x, y) \, ds \end{aligned} \tag{16}$$

aufgrund von Theorem 61.6 und der Stetigkeit von $\operatorname{div} v$. Folglich kann $\operatorname{div} v(x_0, y_0)$ als *lokale Ergiebigkeit* oder *Quellenstärke* von v in (x_0, y_0) interpretiert werden.

b) In der Situation von a) ist $\int_{\partial G} \langle v, \mathfrak{t} \rangle \, ds$ die *Zirkulation* oder *Wirbelstärke* von v längs ∂G. Aus Satz 61.9 ergibt sich daher ähnlich wie in c), daß $(\operatorname{rot} v)_3(x_0, y_0)$ als *„Wirbelstärke* oder *-dichte"* von v in (x_0, y_0) interpretiert werden kann. Vektorfelder mit $(\operatorname{rot} v)_3 = 0$ sind somit *„wirbelfrei"*.

c) Für ein Vektorfeld $v \in \mathcal{C}((\gamma), \mathbb{R}^2)$ gilt also $\int_\gamma \langle v(x), dx \rangle = 0$, wenn v auf dem „Innengebiet" von (γ) $\mathcal{C}^1$ und dort wirbelfrei ist, vgl. dazu auch 60.13.

61.11 Flächenformel. a) Für das Vektorfeld $v(x, y) := (-y, x)^\top$ gilt $(\operatorname{rot} v)_3 = 2$; für $G \in \mathfrak{G}_{st}(\mathbb{R}^2)$ liefert daher der Greensche Integralsatz sofort die *Flächenformel*

$$\begin{aligned} m_2(G) &= \tfrac{1}{2} \int_{\partial G} (\langle x, \mathfrak{t}_2 \rangle - \langle y, \mathfrak{t}_1 \rangle) \, ds \\ &= \tfrac{1}{2} \sum_{\ell=1}^{m} \int_{a_\ell}^{b_\ell} (x_\ell(t) \, \dot{y}_\ell(t) - y_\ell(t) \, \dot{x}_\ell(t)) \, dt \, , \end{aligned} \tag{17}$$

wobei $\gamma_\ell = (x_\ell, y_\ell)^\top : [a_\ell, b_\ell] \mapsto \mathbb{R}^2$ positiv orientierte JPDs der Randkurven Γ_ℓ von G sind.

b) Die Randkurve eines *vierblättrigen Kleeblatts* ist in Polarkoordinaten gegeben durch $r(\varphi) = \sin 2\varphi$, $-\pi \le \varphi \le \pi$. Für das Blatt B im 1. Quadranten hat man also

$$\gamma(t) = (x(t), y(t))^\top = (\sin 2t \, \cos t, \sin 2t \, \sin t)^\top , \quad 0 \le t \le \tfrac{\pi}{2} ,$$

als JPD von ∂B, und es gilt

$$\begin{aligned} x(t) \, \dot{y}(t) - y(t) \, \dot{x}(t) &= \sin 2t \, \cos t \, (2 \cos 2t \, \sin t + \sin 2t \, \cos t) \\ &- \sin 2t \, \sin t \, (2 \cos 2t \, \cos t - \sin 2t \, \sin t) \\ &= \sin^2 2t = \tfrac{1}{2} (1 - \cos 4t) , \quad \text{also} \\ \lambda(B) &= \tfrac{1}{4} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 4t) \, dt = \tfrac{\pi}{8} . \end{aligned}$$

61.12 Leibnizsche Sektorformel. a) Es sei $G \in \mathfrak{G}_{st}(\mathbb{R}^2)$ *sternförmig* bezüglich $0 \in G$, und $\partial G = \Gamma$ sei *eine* geschlossene Kurve mit JPD $\gamma : I \mapsto \partial G$.

Für $t \in I$ sei $\sigma(t) = \sigma[0, \gamma(t)]$ die Strecke oder der *Fahrstrahl* von $0 \in G$ nach $\gamma(t) \in \partial G$, und für $t_1 < t_2 \in [a, b]$ bezeichne $G_{12} := G(t_1, t_2)$ das im Zeitraum $[t_1, t_2]$ von dem Fahrstrahl „überstrichene" Gebiet, also das von der Spur des Weges $\sigma(t_1) + \gamma|_{[t_1,t_2]} + (-\sigma(t_2))$ berandete Gebiet in $\mathfrak{G}_{st}(\mathbb{R}^2)$.

b) Für eine Strecke $\sigma : t \mapsto (x(t), y(t)) = (ct, dt)$ gilt

$$x(t)\,\dot{y}(t) - y(t)\,\dot{x}(t) \;=\; cdt - cdt \;=\; 0\,,$$

und daher ergibt sich aus (17) die *Leibnizsche Sektorformel*

$$\lambda(G(t_1, t_2)) \;=\; \tfrac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (\gamma_1(t)\dot{\gamma_2}(t) - \gamma_2(t)\dot{\gamma_1}(t))\, dt\,. \tag{18}$$

c) Für eine *Ellipse* $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)^\top$, $-\pi \le t \le \pi$, folgt aus (18) sofort

$$\lambda(G(t_1, t_2)) \;=\; \tfrac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (ab \cos^2 t + ab \sin^2 t)\, dt \;=\; \tfrac{ab}{2}\,(t_2 - t_1)\,. \tag{19}$$

Somit „überstreicht der Fahrstrahl in gleichen Zeiträumen gleiche Flächen" *(2. Keplersches Gesetz der Planetenbewegung).*