# 65 Komplexe Wegintegrale.

**65.1 Definition.** *Für einen Weg* $\gamma \in \mathcal{C}^1_{st}([a,b],\mathbb{C})$ *und eine stetige Funktion* $f \in \mathcal{C}((\gamma),\mathbb{C})$ *wird durch*

$$\textstyle\int_\gamma f(z)\,dz := \int_a^b f(\gamma(t))\,\dot\gamma(t)\,dt \in \mathbb{C} \tag{1}$$

*das* komplexe Wegintegral *von* $f$ *über* $\gamma$ *erklärt.*

**65.2 Bemerkungen.** a) Für die *reellen Vektorfelder*

$$v := (\operatorname{Re} f, -\operatorname{Im} f)^\top =: (P,-Q)^\top\,, \tag{2}$$
$$w := D_{\pi/2}\,v = (Q,P)^\top \tag{3}$$

folgt aus (1) sofort

$$\textstyle\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma \langle\, v(x), dx\,\rangle + i \int_\gamma \langle\, w(x), dx\,\rangle\,. \tag{4}$$

b) Aus (4) ergibt sich $\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$ für äquivalente $\mathcal{C}^1_{st}$-Wege $\gamma_1 \sim \gamma_2$. Weiter gilt $\int_{-\gamma} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz$, und für eine Summe von Wegen wie in (60.3) hat man $\int_{\gamma+\varphi} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz + \int_\varphi f(z)\,dz$.

c) Es seien $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f = P + iQ \in \mathcal{C}(D,\mathbb{C})$. Nach (4) und Satz 60.8 sind die Wegintegrale $\int_\gamma f(z)\,dz$ in $D$ genau dann *wegunabhängig,* wenn die reellen Vektorfelder $v = (P,-Q)^\top$ und $w = (Q,P)^\top$ *Potentiale* $A, B \in \mathcal{C}^1(D,\mathbb{R})$ besitzen. Mit $F := A + iB \in \mathcal{C}^1(D,\mathbb{C})$ gilt aber

$$\operatorname{grad} A = v \;\text{ und }\; \operatorname{grad} B = w \;\Leftrightarrow\; \partial_{\bar z} F = 0 \;\text{ und }\; \partial_z F = f\,. \tag{5}$$

Aus 64.2 c) und Satz 60.8 ergibt sich daher:

**65.3 Satz.** *Für ein Gebiet* $D \subseteq \mathbb{C}$ *und eine stetige Funktion* $f \in \mathcal{C}(D,\mathbb{C})$ *sind äquivalent:*

*(a) Es existiert eine* komplexe Stammfunktion *zu* $f$, *d. h. es gibt* $F \in \mathcal{O}(D)$ *mit* $F' = f$.

*(b) Es ist* $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ *für jeden* geschlossenen $\mathcal{C}^1_{st}$*-Weg* $\gamma$ *in* $D$.

*(c) Es ist* $\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz$ *für* $\mathcal{C}^1_{st}$*-Wege* $\gamma_0$, $\gamma_1$ *in* $D$ *mit* $\gamma_0^A = \gamma_1^A$ *und* $\gamma_0^E = \gamma_1^E$.

**65.4 Bemerkungen.** a) Aufgrund von (60.7) gilt natürlich

$$\textstyle\int_\gamma F'(z)\,dz = F(\gamma^E) - F(\gamma^A) \tag{6}$$

für $F \in \mathcal{O}(D)$, und unter der Voraussetzung 65.3 (c) definiert

$$F(z) := \textstyle\int_{\gamma_z} f(\zeta)\,d\zeta \tag{7}$$

eine komplexe Stammfunktion von $f$, wobei $\gamma_z$ ein $\mathcal{C}^1_{st}$-Weg in $D$ mit $\gamma_z^E = z$ und $\gamma_z^A = a$ für einen fest gewählten Punkt $a \in D$ ist.

b) Die in (4) auftretenden Vektorfelder $v$ und $w$ sind genau dann *wirbelfrei,* wenn die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen gelten, wenn also $f$ *holomorph* ist. Aus Theorem 60.11 folgt somit:

**65.5 Theorem (Cauchyscher Integralsatz).** *Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein sternförmiges (oder einfach zusammenhängendes) Gebiet. Dann gilt $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ für* jeden *geschlossenen $\mathcal{C}^1_{st}$-Weg $\gamma$ in $D$.*

**65.6 Beispiele.** a) Für $z \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ sind die Wege

$$\kappa_{z,r} : [-\pi,\pi] \mapsto \mathbb{C}\,, \quad \kappa_{z,r}(t) := z + r\,e^{it}\,, \tag{8}$$

glatte Jordan-Parametrisierungen der Kreislinien $S_r(z)$. Für $n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\int_{\kappa_{z,r}} (\zeta - z)^n\,d\zeta \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} (re^{it})^n\,ire^{it}\,dt \;=\; i\,r^{n+1} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n+1)t}\,dt\,, \quad \text{also}$$

$$\int_{\kappa_{z,r}} (\zeta - z)^n\,d\zeta \;=\; \begin{cases} 2\pi i & , \quad n = -1 \\ 0 & , \quad n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\} \end{cases}\,. \tag{9}$$

Das Ergebnis für $n = -1$ zeigt wieder, daß $\mathbb{C}\backslash\{z\}$ nicht einfach zusammenhängend ist. In der Tat handelt es sich hier für $z = 0$ um die komplexe Formulierung für Beispiel 60.10 b).

b) Als erste Anwendung des Cauchyschen Integralsatzes werden die (uneigentlichen) *Fresnel-Integrale* berechnet:
Für $r > 0$ sind die Polygone $\sigma_r := \sigma[0, r, r+ir, 0]$ geschlossene $\mathcal{C}^1_{st}$-Wege in $\mathbb{C}$, und der Cauchysche Integralsatz liefert

$$\int_{\sigma_r} e^{-z^2}\,dz \;=\; 0\,. \tag{10}$$

Nun hat man

$$\Big|\int_{\sigma[r,r+ir]} e^{-z^2}\,dz\Big| \;=\; \Big|\int_0^1 e^{-(r+irt)^2}\,ir\,dt\Big| \;\le\; \int_0^1 r\,e^{(t^2-1)r^2}\,dt \to 0$$

für $r \to \infty$, und aus (10) folgt

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\sigma[0,r+ir]} e^{-z^2}\,dz \;=\; \lim_{r\to\infty} \int_{\sigma[0,r]} e^{-z^2}\,dz \;=\; \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx \;=\; \tfrac12\sqrt{\pi}\,.$$

Dies bedeutet aber

$$\int_0^\infty e^{-(1+i)^2x^2}\,(1+i)\,dx \;=\; (1+i)\int_0^\infty e^{-2ix^2}\,dx \;=\; \tfrac12\sqrt{\pi}\,,$$

und Trennung in Real- und Imaginärteil liefert

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (\cos 2x^2 + \sin 2x^2)\,dx \;&=\; \tfrac12\sqrt{\pi}\,, \\ \int_0^\infty (\cos 2x^2 - \sin 2x^2)\,dx \;&=\; 0 \qquad \text{und somit} \end{aligned}$$

$$\int_0^\infty \cos x^2\,dx \;=\; \int_0^\infty \sin x^2\,dx \;=\; \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \tag{11}$$

wegen der (nicht absoluten) Konvergenz dieser uneigentlichen Integrale.