66 Cauchy-Formeln

66.1 Komplexe Kurvenintegrale. a) Für eine *orientierte* Kurve $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ und $f \in \mathcal{C}(\Gamma)$ wird das komplexe Kurvenintegral durch

$$\int_\Gamma f(z)\,dz := \int_\gamma f(z)\,dz \tag{1}$$

definiert, wobei γ eine *positiv orientierte* JPD von Γ ist.

b) Der Rand $\partial G = \bigcup_{\ell=1}^{m} \Gamma_\ell$ einer offenen Menge $G \in \mathfrak{G}_{st}(\mathbb{C})$ wird mittels $\mathfrak{t} = D_{\pi/2}\,\mathfrak{n}_a$ stets so *orientiert,* daß G „links umlaufen" wird (vgl. 61.8), und für $f \in \mathcal{C}(\partial G)$ setzt man

$$\int_{\partial G} f(z)\,dz := \sum_{\ell=1}^{m} \int_{\Gamma_\ell} f(z)\,dz\,. \tag{2}$$

66.2 Satz. *Es seien* $G \in \mathfrak{G}_{st}(\mathbb{C})$ *und* $f \in \mathcal{C}(\overline{G})$ *mit* $f|_G \in \mathcal{C}^1(G)$ *und* $\partial_{\bar z} f \in \mathcal{L}_1(G)$. *Dann gilt*

$$\int_{\partial G} f(z)\,dz \;=\; 2i \int_G \partial_{\bar z} f(z)\,d\lambda(z)\,. \tag{3}$$

Beweis. Für die in (65.4) auftretenden Vektorfelder v und w gilt

$$(\operatorname{rot} v)_3 + i\,(\operatorname{rot} w)_3 \;=\; -(\partial_x Q + \partial_y P) + i\,(\partial_x P - \partial_y Q) \;=\; 2i\,\partial_{\bar z} f\,; \tag{4}$$

daher folgt (3) sofort aus dem Greenschen Integralsatz.

66.3 Folgerung (Cauchyscher Integralsatz). *Es seien* $G \in \mathfrak{G}_{st}(\mathbb{C})$ *und* $f \in \mathcal{C}(\overline{G}) \cap \mathcal{O}(G)$. *Dann gilt* $\int_{\partial G} f(z)\,dz = 0$.

66.4 Theorem (allgemeine Cauchysche Integralformel). *Es seien* $G \in \mathfrak{G}_{st}(\mathbb{C})$ *und* $f \in \mathcal{C}(\overline{G})$ *mit* $f|_G \in \mathcal{C}^1(G)$ *und* $\partial_{\bar z} f \in \mathcal{L}_1(G)$. *Für* $z \in G$ *gilt dann*

$$2\pi i\, f(z) \;=\; \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - 2i \int_G \partial_{\bar\zeta} f(\zeta)\,\frac{1}{\zeta - z}\,d\lambda(\zeta)\,. \tag{5}$$

66.5 Theorem (Cauchysche Integralformel). *Es seien* $G \in \mathfrak{G}_{st}(\mathbb{C})$ *und* $f \in \mathcal{C}(\overline{G}) \cap \mathcal{O}(G)$. *Für* $z \in G$ *gilt dann*

$$f(z) \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta\,. \tag{6}$$

66.6 Bemerkungen. a) Mittels (6) können also die Werte einer holomorphen Funktion im Inneren von G aus denen der Funktion auf dem Rand von G berechnet werden.

b) Durch Differentiation von (6) nach z gemäß 56.12 b) oder 51.2 ergibt sich auch

$$f^{(k)}(z) \;=\; \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\,d\zeta\,, \quad z \in G\,, \quad k \in \mathbb{N}_0\,. \tag{7}$$

c) Nun seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathcal{O}(D)$. Für $w \in D$ und $G := K_r(w)$ mit $\overline{K}_r(w) \subseteq D$ impliziert b) sofort, daß f *unendlich oft (komplex) differenzierbar* ist!

66.7 Satz (Cauchy-Abschätzungen). *Es seien* $D \subseteq \mathbb{C}$ *offen,* $K \subseteq D$ *kompakt und* $r > 0$ *mit* $K_r := \{\zeta \in \mathbb{C} \mid \operatorname{dist}(\zeta, K) \leq r\} \subseteq D$. *Für* $f \in \mathcal{O}(D)$ *und* $k \in \mathbb{N}_0$ *gilt dann*

$$\sup_{z \in K} |\, f^{(k)}(z)\,| \;\leq\; k!\; r^{-k} \sup_{\zeta \in K_r} |\, f(\zeta)\,|\,. \tag{8}$$

66.8 Satz. *Es sei* $D \subseteq \mathbb{C}$ *offen. Für* $f \in \mathcal{C}(D, \mathbb{C})$ *sind äquivalent:*

(a) f *ist holomorph auf* D,

(b) f *besitzt auf jedem einfach zusammenhängenden Gebiet* $D_1 \subseteq D$ *eine komplexe Stammfunktion,*

(c) Für jedes „kleine" Dreieck T *mit* $\overline{T} \subseteq K_\rho(c) \subseteq D$ *gilt* $\int_{\partial T} f(z)\, dz = 0$.

Die Aussage „*(c)* $\Rightarrow$ *(a)* " ist als *Satz von Morera* bekannt.

66.9 Lokal gleichmäßige Konvergenz. Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$ (oder $D \subseteq \mathbb{R}^n$) offen. Eine Funktionenfolge (f_n) in $\mathcal{F}(D)$ konvergiert *lokal gleichmäßig* auf D gegen $f \in \mathcal{F}(D)$, falls (f_n) auf jeder kompakten Menge $K \subseteq D$ gleichmäßig gegen f konvergiert.

66.10 Satz (Weierstraß). *Für eine Folge* (f_n) *in* $\mathcal{O}(D)$ *gelte* $f_n \to f$ *lokal gleichmäßig. Dann gilt auch* $f \in \mathcal{O}(D)$ *und* $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ *lokal gleichmäßig für alle* $k \in \mathbb{N}$.

Beweis. Es ist f stetig, und die Morera-Bedingung 66.8 (c) vererbt sich von den f_n auf die Grenzfunktion f. Die zweite Aussage folgt dann sofort aus (8).