67 Potenzreihenentwicklungen

67.1 Definition. *Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : D \mapsto \mathbb{C}$ heißt* analytisch, *falls es zu $c \in D$ ein $\rho > 0$ mit $K_\rho(c) \subseteq D$ und eine Potenzreihenentwicklung*

$$f(z) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(z-c)^k\,, \quad |\,z-c\,| < \rho \tag{1}$$

von f um c mit Konvergenzradius $\geq \rho$ gibt.

67.2 Bemerkung. Die Potenzreihe in (1) konvergiert *lokal gleichmäßig* auf $K_\rho(c)$; nach dem Satz von Weierstraß 66.10 ist daher f dort *holomorph.* Folglich sind analytische Funktionen holomorph. Es gilt auch die Umkehrung, genauer hat man:

67.3 Theorem. *Es seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathcal{O}(D)$. Dann ist f analytisch. Für $c \in D$ und $K_\rho(c) \subseteq D$ gilt die Potenzreihenentwicklung*

$$f(z) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(z-c)^k\,, \quad |\,z-c\,| < \rho\,, \quad \textit{mit} \tag{2}$$

$$a_k \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa_{c,r}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-c)^{k+1}}\,d\zeta\,, \quad 0 < r < \rho\,, \quad k \in \mathbb{N}_0\,. \tag{3}$$

67.4 Bemerkung. Theorem 67.3 enthält auch ein interessantes Ergebnis für *analytische* Funktionen: Der Konvergenzradius der Potenzreihenentwicklung in $c \in D$ ist $\geq d_{\partial D}(c)$, also mindestens gleich der Distanz von c zum Rand von D.

Aus Theorem 67.3 und den Cauchy-Abschätzungen (66.8) ergeben sich:

67.5 Satz (Liouville). *Eine* beschränkte *ganze Funktion $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ ist konstant.*

67.6 Fundamentalsatz der Algebra. *Ein Polynom $P(z) = \sum_{k=0}^{m} a_k z^k$ vom Grad $m \geq 1$ besitzt eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.*

Beweis. Andernfalls gilt $\frac{1}{P} \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Wegen $|\,P(z)\,| \geq \frac{1}{2}\,|\,a_m\,|\,|\,z\,|^m$ für große $|\,z\,|$ ist $\frac{1}{P}$ beschränkt. Nach dem Satz von Liouville ist $\frac{1}{P}$ also konstant im Widerspruch zu $\deg P \geq 1$.

67.7 Diskrete Mengen. *Es seien E ein normierter Raum, z. B. $E = \mathbb{C}$, und $M \subseteq D \subseteq E$.*

a) Ein Punkt $c \in E$ heißt Häufungspunkt *von M, wenn es eine Folge (x_n) in $M \backslash \{c\}$ mit $x_n \to c$ gibt.*

b) Die Menge $M \subseteq D$ heißt diskret *in D, falls M keinen Häufungspunkt in D hat.*

c) Es ist $M \subseteq D$ genau dann diskret in D, wenn es zu jedem Punkt $d \in D$ ein $\delta > 0$ gibt mit

$$K'_\delta(d) \cap M := \;\{x \in E \mid 0 < \|\,x-d\,\| < \delta\} \cap M \;=\; \emptyset\,. \tag{4}$$

67.8 Identitätssatz. *Für ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ und $f \in \mathcal{O}(G)$ sind äquivalent:*

(a) *Die Menge $N_0(f) = \{z \in G \mid f(z) = 0\}$ der Nullstellen von f in G hat einen Häufungspunkt $c \in G$.*

(b) *Es gibt $c \in G$ mit $f^{(k)}(c) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.*

(c) *Es ist $f = 0$.*

Für $f \in \mathcal{O}(D)$ mit $f \neq 0$ ist also die Menge $N_0(f)$ der Nullstellen *diskret* in G. Auf dieser Tatsache beruht das folgende wichtige

67.9 Satz (Maximum-Prinzip). *Es seien $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in \mathcal{O}(G)$ eine holomorphe Funktion.*

a) Hat $|f|$ ein lokales Maximum in G, so ist f konstant.

b) Ist zusätzlich G beschränkt und $f \in \mathcal{C}(\overline{G})$, so gilt

$$\max_{z \in \overline{G}} |f(z)| = \max_{z \in \partial G} |f(z)| . \tag{5}$$