68 Laurent-Entwicklungen

68.1 Laurent-Zerlegung. Für eine holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(R_{\sigma,\rho}(c))$ auf einem *Kreisring*

$$R_{\sigma,\rho}(c) := \{z \in \mathbb{C} \mid \sigma < |\, z - c\,| < \rho\}\,, \quad 0 \le \sigma < \rho \le \infty\,, \quad \text{gilt} \tag{1}$$

$$f(z) \;=\; f_i(z) + f_a(z)\,, \quad \sigma < |\, z - c\,| < \rho\,, \tag{2}$$

wobei $f_i \in \mathcal{O}(K_\rho(c))$ und $f_a \in \mathcal{O}(R_{\sigma,\infty}(c))$ durch

$$f_i(z) \;=\; \tfrac{1}{2\pi i} \int_{\kappa_{c,r}} \tfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\,, \quad |\, z - c\,| < r < \rho\,, \quad r > \sigma\,, \tag{3}$$

$$f_a(z) \;=\; -\tfrac{1}{2\pi i} \int_{\kappa_{c,s}} \tfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\,, \quad |\, z - c\,| > s > \sigma\,, \quad s < \rho\,, \tag{4}$$

gegeben sind. Für f_i gilt die Potenzreihenentwicklung (67.2) mit den Koeffizienten gemäß (67.3), und für f_a hat man analog

$$f_a(z) \;=\; \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k\,(z-c)^k\,, \quad |\, z - c\,| > \sigma\,, \quad \text{mit} \tag{5}$$

$$a_k \;=\; \tfrac{1}{2\pi i} \int_{\kappa_{c,s}} \tfrac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{k+1}}\, d\zeta\,, \quad \sigma < s < \rho\,, \quad k \in -\mathbb{N}\,, \tag{6}$$

wobei die Reihe (5) absolut und lokal gleichmäßig auf $R_{\sigma,\infty}(c)$ konvergiert.

Im Fall $\sigma = 0$ ist c eine *isolierte Singularität* der holomorphen Funktion f auf der *„gelochten Kreisscheibe"*

$$K'_\rho(c) := R_{0,\rho}(c) \;=\; K_\rho(c) \backslash \{c\}\,. \tag{7}$$

68.2 Satz. *Eine holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(K'_\rho(c))$ besitzt eine* Laurent-Entwicklung

$$f(z) \;=\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\,(z-c)^k\,, \quad 0 < |\, z - c\,| < \rho\,, \quad \textit{mit} \tag{8}$$

$$a_k \;=\; \tfrac{1}{2\pi i} \int_{\kappa_{c,r}} \tfrac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{k+1}}\, d\zeta\,, \quad 0 < r < \rho\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,, \tag{9}$$

wobei die Reihe (8) absolut und lokal gleichmäßig auf $K'_\rho(c)$ konvergiert. Es gelten die Cauchy-Abschätzungen

$$|\, a_k \,| \;\le\; r^{-k} \sup_{\zeta \in S_r(c)} |\, f(\zeta)\,|\,, \quad 0 < r < \rho\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,. \tag{10}$$

68.3 Beispiel. Die Funktion $f : z \mapsto \frac{1}{1+z^2}$ ist holomorph auf $\mathbb{C}\backslash\{\pm i\}$.

a) Für $|\, z\,| < 1$ hat man die geometrische Reihenentwicklung

$$f(z) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, z^{2k}\,, \quad |\, z\,| < 1\,.$$

b) Für $|\, z\,| > 1$ hat man

$$f(z) \;=\; \frac{1}{z^2}\, \frac{1}{1+\frac{1}{z^2}} \;=\; \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z^{2k}} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z^{2k+2}}\,.$$

c) Für $0 < |\, z - i \,| < 2$ macht man die Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{1+z^2} \;=\; -\frac{i}{2}\,\frac{1}{z-i} + \frac{i}{2}\,\frac{1}{z+i} \tag{11}$$

und entwickelt

$$\frac{1}{z+i} \;=\; \frac{1}{z-i+2i} \;=\; \frac{1}{2}\,\frac{1}{i+\frac{z-i}{2}} \;=\; \frac{1}{2i}\,\frac{1}{i+\frac{z-i}{2i}} \;=\; \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2i)^k}\,(z-i)^k\,;$$

damit erhält man dann

$$\frac{1}{1+z^2} \;=\; -\frac{i}{2}\,\frac{1}{z-i} + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2i)^k}\,(z-i)^k\,, \quad 0 < |\, z-i \,| < 2\,.$$

d) Für $|\, z - i \,| > 2$ entwickelt man

$$\frac{1}{z+i} \;=\; \frac{1}{z-i+2i} \;=\; \frac{1}{z-i}\,\frac{1}{1+\frac{2i}{z-i}} \;=\; \frac{1}{z-i}\sum_{k=0}^{\infty}(-2i)^k\,\frac{1}{(z-i)^k}\,;$$

mit (11) ergibt sich dann

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+z^2} \;&=\; -\frac{i}{2}\,\frac{1}{z-i} + \frac{i}{2}\,\frac{1}{z-i}\sum_{k=0}^{\infty}(-2i)^k\,\frac{1}{(z-i)^k}\\ &=\; \frac{i}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(-2i)^k\,\frac{1}{(z-i)^{k+1}}\,, \quad |\, z-i \,| > 2\,.\end{aligned}$$

68.4 Singularitäten. a) Die *Ordnung* einer holomorphen Funktion $f \in \mathcal{O}(K'_\rho(c))$ mit Laurent-Entwicklung (8) in c wird definiert als

$$\nu(f;c) := \ \inf\{k \in \mathbb{Z} \mid a_k \neq 0\} \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}\,. \tag{12}$$

b) Die Singularität c von $f \in \mathcal{O}(K'_\rho(c))$ heißt *hebbar,* falls $\nu(f;c) \geq 0$ ist, ein *Pol* von f, falls $-\infty < \nu(f;c) < 0$ gilt und *wesentlich,* falls $\nu(f;c) = -\infty$ ist.

c) Im Fall einer *hebbaren* Singularität wird f durch $f(c) := a_0$ zu einer auf dem vollen Kreis $K_\rho(c)$ holomorphen Funktion *fortgesetzt.*

d) Die drei Typen von Singularitäten können durch das *Abbildungsverhalten* von f nahe c charakterisiert werden. Die folgende Aussage a) heißt *Riemannscher Hebbarkeitssatz,* Aussage c) heißt *Satz von Casorati-Weierstraß.*

68.5 Satz. *Die Singularität c von $f \in \mathcal{O}(K'_\rho(c))$ ist*

a) genau dann hebbar, *falls f auf einer gelochten Kreisscheibe $K'_r(c)$ mit* $0 < r \leq \rho$ beschränkt *ist,*

b) genau dann ein Pol *von f, falls $\lim\limits_{z\to c} |\, f(z) \,| = \infty$ gilt,*

c) genau dann wesentlich, *falls $f(K'_r(c))$ für alle* $0 < r \leq \rho$ *in* $\mathbb{C}$ dicht *ist.*

68.6 Beispiele und Bemerkungen. a) Im Fall $\nu(f;c) \geq 0$ heißt $\nu(f;c)$ auch die *Nullstellen-Ordnung* von f in c, im Fall $-\infty < \nu(f;c) < 0$ heißt $\pi(f;c) := -\nu(f;c)$ auch die *Polordnung* von f in c.

b) Die Funktion $f(z) := \frac{\sin z}{z}$ hat eine hebbare Singularität in 0.

c) Die Funktion $f(z) := \frac{1}{\sin^2 z}$ hat einen Pol der Ordnung 2 in 0.

d) Die Funktion $f(z) := e^{1/z} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, z^{-k}$ hat eine wesentliche Singularität in 0, und es gilt $f(K_r'(0)) = \mathbb{C} \backslash \{0\}$ für alle $r > 0$.

e) Hat allgemeiner eine holomorphe Funktion f eine wesentliche Singularität in c, so gilt $f(K_r'(c)) = \mathbb{C}$ für alle $r > 0$ oder $f(K_r'(c)) = \mathbb{C} \backslash \{w\}$ für alle $r > 0$ und ein geeignetes $w \in \mathbb{C}$ *(Satz von Picard).*