XI. Fourier - Analysis

71 Fourier-Reihen und der Satz von Fejér

71.1 Überlagerung harmonischer Schwingungen. a) *Schwingungsphänomene* werden durch **periodische Funktionen** beschrieben. Für die Periode 2π hat man die *Grundschwingungen* $\sin x$ und $\cos x$, aber auch die *Oberschwingungen* $\sin kx$ und $\cos kx$ für $k \geq 2$.

b) Man versucht nun, möglichst allgemeine 2π-periodische Funktionen als *Überlagerungen* dieser *harmonischen Schwingungen* zu schreiben, d. h. als *Fourier-Reihen*

$$\tfrac{1}{2}a_0 \;+\; \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)\,, \quad a_k\,, b_k \in \mathbb{C}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{1}$$

Nach der Eulerschen Formel $e^{ix} = \cos x + i\,\sin x$ ist es äquivalent, Reihen der Form

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}\,, \quad c_k \in \mathbb{C}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \tag{2}$$

zu betrachten, deren Konvergenz über die Partialsummen $(s_n := \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx})$ definiert sei. Die Koeffizienten hängen folgendermaßen zusammen:

$$c_k \;=\; \begin{cases} \frac{1}{2}(a_k - ib_k) & , \quad k > 0 \\ \frac{1}{2}\,a_0 & , \quad k = 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-k} + ib_{-k}) & , \quad k < 0 \end{cases}\,, \tag{3}$$

$$\begin{cases} a_k \;=\; (c_k + c_{-k}) & , \quad k \geq 0 \\ b_k \;=\; i\,(c_k - c_{-k}) & , \quad k \geq 1 \end{cases}\,. \tag{4}$$

c) Man hat die folgenden *Orthogonalitätsrelationen*: Für $m, n \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}e^{-imx}\,dx \;=\; \delta_{nm} := \begin{cases} 1 & , \quad n = m \\ 0 & , \quad n \neq m \end{cases}\,. \tag{5}$$

d) Es sei nun die Reihe $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$ auf $\mathbb{R}$ *gleichmäßig konvergent,* z. B. gelte $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\,c_k\,| < \infty$. Durch $f(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ wird dann eine *stetige* und 2π - *periodische* Funktion $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ definiert. Die Koeffizienten c_k lassen sich folgendermaßen aus der Funktion f zurückgewinnen:

$$\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-imx}\,dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\,\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}e^{-imx}\,dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\delta_{km} = c_m\,.$$

Es liegt daher der Versuch nahe, eine *vorgegebene* Funktion f folgendermaßen in eine Fourier-Reihe zu entwickeln:

71.2 Definition. *Für $f \in \mathcal{L}_1[-\pi,\pi]$ sei*

$$\widehat{f}(k) := \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx}\, dx\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,, \tag{6}$$

der k-te Fourier-Koeffizient *von f, und*

$$f(x) \quad \sim \quad \textstyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k)\, e^{ikx} \tag{7}$$

sei die zu f assoziierte **Fourier-Reihe***.*

71.3 Bemerkungen. a) Das Symbol „$\sim$“ in (7) behauptet i. a. (zunächst) keinerlei Konvergenz der Reihe.

b) Für *gerade* bzw. *ungerade* Funktionen $f \in \mathcal{L}_1[-\pi,\pi]$ berechnet man die Fourier-Reihe zweckmäßigerweise in der Form (1), da dann die b_k bzw. a_k dort verschwinden. Aus (4) und (6) folgt

$$\begin{aligned} a_k &= \tfrac{1}{\pi} \textstyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \cos kx\, dx\,, \quad k \in \mathbb{N}_0\,, & (8)\\ b_k &= \tfrac{1}{\pi} \textstyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \sin kx\, dx\,, \quad k \in \mathbb{N}\,. & (9)\end{aligned}$$

c) In 71.2 kann man auch $f \in \mathcal{L}_1[a, a+2\pi]$ für irgendein $a \in \mathbb{R}$ zulassen. Falls die Fourier-Reihe in (7) dann auf $[a, a+2\pi]$ gegen f konvergiert, so konvergiert sie auf $\mathbb{R}$ gegen die 2π - *periodische Fortsetzung* $\widetilde{f}$ von f.

71.4 Beispiel. Die Funktion $h(x) := \begin{cases} -1 & , \quad -\pi < x < 0 \\ 0 & , \quad x = 0\,, \pm\pi \\ 1 & , \quad 0 < x < \pi \end{cases}$ ist ungerade. Aus

$$b_k \;=\; \tfrac{2}{\pi} \textstyle\int_0^{\pi} \sin kx\, dx \;=\; \begin{cases} 0 & , \quad k \text{ gerade} \\ \frac{4}{\pi k} & , \quad k \text{ ungerade} \end{cases}$$

erhält man daher

$$h(x) \sim \tfrac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{\sin(2k-1)x}{2k-1}\,. \tag{10}$$

Wegen $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} = \infty$ ist es zunächst unklar, ob diese Reihe (gegen f) konvergiert.

71.5 Dirichlet-Kerne. a) Es sei $f \in \mathcal{L}_1[-\pi,\pi]$. Für die Partialsummen

$$s_n(f;x) := \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{ikx}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \tag{11}$$

der Fourier-Reihe gilt die Darstellung

$$s_n(f;x) \;=\; \tfrac{1}{2\pi} \textstyle\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x-t)\, f(t)\, dt\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \tag{12}$$

mit den *geraden, stetigen* und 2π - *periodischen Dirichlet-Kernen*

$$D_n(s) \;=\; \frac{\sin\left((2n+1)\frac{s}{2}\right)}{\sin\frac{s}{2}}\,, \quad s \in \mathbb{R} \quad (\,D_n(2k\pi) = 2n+1\,)\,. \tag{13}$$

b) In der Tat gilt nach (11)

$$\begin{aligned} s_n(f;x) &= \sum_{k=-n}^{n} \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-ikt}\, dt\, e^{ikx} = \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)}\, dt \\ &= \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x-t)\, f(t)\, dt \quad \text{mit} \\ D_n(s) &= \sum_{k=-n}^{n} e^{iks} = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos ks = \frac{\sin\left((2n+1)\frac{s}{2}\right)}{\sin\frac{s}{2}}\,, \end{aligned}$$

wobei man die letzte Formel etwa durch Induktion beweisen kann.

Es zeigt Abb. 71a die Dirichlet-Kerne D_2 (gepunktet) und D_7, Abb. 71b die Funktion h aus Beispiel 71.4 zusammen mit $s_2(h)$ und $s_7(h)$.

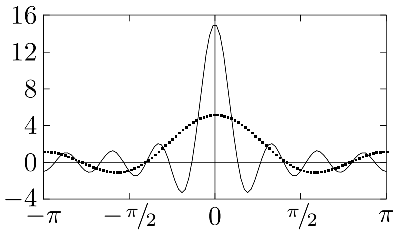

Abb. 71a

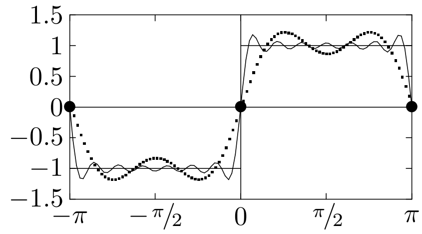

Abb. 71b

71.6 Fejér-Kerne und Dirac-Folgen. a) Die *Fejér-Kerne* $F_n \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ werden als *arithmetische Mittel*

$$F_n(s) := \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} D_j(s)\,, \quad s \in \mathbb{R}\,, \tag{14}$$

der Dirichlet-Kerne definiert. Für die arithmetischen Mittel

$$\sigma_n(f;x) := \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} s_j(f;x) \tag{15}$$

der Partialsummen $s_n(f;x)$ der Fourier-Reihe von $f \in \mathcal{L}_1[-\pi,\pi]$ gilt dann

$$\sigma_n(f;x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(x-t) f(t)\, dt\,, \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{16}$$

Es zeigt Abb. 71c die Fejér-Kerne F_3 (gepunktet) und F_8, Abb. 71d die Funktion h aus Beispiel 71.4 zusammen mit $\sigma_3(h)$ und $\sigma_8(h)$.

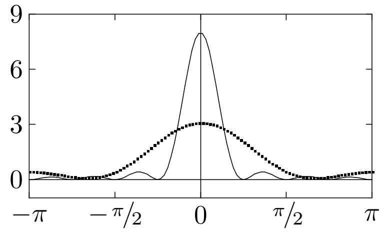

Abb. 71c

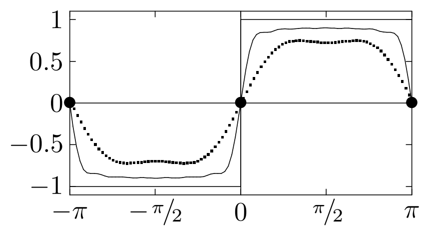

Abb. 71d

b) Für die Fejér-Kerne $F_n \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ gilt explizit

$$F_n(s) = \frac{1}{n} \left(\frac{\sin\frac{ns}{2}}{\sin\frac{s}{2}} \right)^2, \quad s \in \mathbb{R} \quad (\, F_n(2k\pi) = n\,)\,. \tag{17}$$

c) Die Fejér-Kerne (F_n) sind eine *Dirac-Folge* in $\mathcal{C}_{2\pi}^{\infty}(\mathbb{R})$, d. h.:
Es ist F_n gerade und $F_n \geq 0$; weiter gilt

$$\tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(s)\, ds \;=\; 1\,, \tag{18}$$

$$\forall\, \delta > 0 \;:\; \lim_{n\to\infty} \sup\nolimits_{\delta \leq |s| \leq \pi} F_n(s) \;=\; 0\,. \tag{19}$$

Dies bedeutet, daß F_n für große n stark um den Nullpunkt konzentriert ist; F_n approximiert die Diracsche „δ-Funktion".

71.7 Theorem (Fejér). *a) Für* $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ *gilt* $\sigma_n(f;x) \to f(x)$ gleichmäßig *auf* $\mathbb{R}$.
b) Für $f \in \mathcal{L}_1[-\pi,\pi]$ *gilt*

$$\|\, f - \sigma_n(f)\,\|_{L_1} \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} |\, f(x) - \sigma_n(f;x)\,|\, dx \to 0 \quad \textit{für} \;\; n \to \infty\,. \tag{20}$$

c) Für $f \in \mathcal{L}_1[-\pi,\pi]$ *und* $x \in \mathbb{R}$ *mögen die einseitigen Grenzwerte*

$$\widetilde{f}(x^{\pm}) := \lim_{t \to x^{\pm}} \widetilde{f}(t) \tag{21}$$

existieren. Dann gilt

$$\sigma_n(f;x) \to f^*(x) := \tfrac{1}{2}\,(\widetilde{f}(x^+) + \widetilde{f}(x^-))\,. \tag{22}$$

71.8 Bemerkungen. a) Theorem 71.7 gilt auch dann, wenn in (16) die Fejér-Kerne durch eine andere Dirac-Folge ersetzt werden.
b) Ist die Fourier-Reihe von $f \in \mathcal{L}_1[-\pi,\pi]$ in der Situation von 71.7 c) konvergent, so gilt

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\, e^{ikx} \;=\; f^*(x)\,. \tag{23}$$

71.9 Dirichletsches Konvergenzkriterium. a) Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$ aus Beispiel 71.4 konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$. Für $x \in \pi\mathbb{Z}$ ist das klar; für $x \notin \pi\mathbb{Z}$ benutzt man das *Dirichletsche Konvergenzkriterium:*
b) Eine Reihe $\sum_{k\geq 1} a_k\, c_k$ komplexer Zahlen konvergiert, falls
1) die Folge $(s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k)$ beschränkt ist und
2) die Folge $(c_k) \subseteq \mathbb{R}$ eine monoton fallende Nullfolge ist.
c) Beispiele für Folgen (a_k) mit beschränkten Partialsummen gemäß 1) sind etwa $(a_k) = ((-1)^k)$ oder $(a_k) = (z^k)$ für $|\, z\,| = 1$, aber $z \neq 1$.
d) In a) ist $(c_k = \frac{1}{2k-1})$ eine monoton fallende Nullfolge, und wegen $\sin t = \operatorname{Im} e^{it}$ hat die Folge $(a_k = \sin(2k-1)x)$ beschränkte Partialsummen. Nach dem Satz von Fejér bzw. 71.8 b) gilt also „$=$" in (10):

$$\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots \;=\; \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\pi}{4} & , & 2n\pi < x < (2n+1)\,\pi \\ 0 & , & x \in \pi\,\mathbb{Z} \\ -\frac{\pi}{4} & , & (2n-1)\,\pi < x < 2n\,\pi \end{array} \right. . \tag{24}$$

71.10 Beispiel. Es wird die Fourier-Reihe der Funktion $f \in \mathcal{L}_1[0, 2\pi]$ berechnet, die durch $f(x) := \begin{cases} \frac{\pi - x}{2} & , \quad 0 < x < 2\pi \\ 0 & , \quad x = 0\,,\, 2\pi \end{cases}$ definiert sei. Da f ungerade ist, gilt $a_k = 0$, und man hat

$$b_k \;=\; \tfrac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tfrac{\pi - x}{2} \sin kx \, dx \;=\; \tfrac{1}{k}\,.$$

Folglich gilt $f(x) \sim \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$. Mit dem Satz von Fejér bzw. 71.8 b) und dem Dirichletschen Konvergenzkriterium folgt also

$$\tfrac{\pi - x}{2} \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{\sin kx}{k}\,, \quad 0 < x < 2\pi\,; \tag{25}$$

speziell für $x = \frac{\pi}{2}$ erhält man die Summe der *Leibnizschen Reihe:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^k}{2k+1} \;=\; \tfrac{\pi}{4} \;=\; 0.7853981633974483096\ldots\,. \tag{26}$$

Der Satz von Fejér 71.7 a) impliziert, daß stetige 2π-periodische Funktionen gleichmäßig durch *trigonometrische Polynome*

$$T_m(x) := \sum_{k=-m}^{m} t_k e^{ikx} \tag{27}$$

approximiert werden können. Daraus folgt leicht auch die folgende wichtige Aussage über die *gleichmäßige Approximation stetiger Funktionen durch Polynome* :

71.11 Theorem (Weierstraßscher Approximationssatz). *Es seien $J \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $f \in \mathcal{C}(J, \mathbb{C})$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein Polynom $P \in \mathbb{C}[x]$ mit*

$$\|\, f - P \,\|_J \;=\; \sup_{x \in J} \,|\, f(x) - P(x) \,| \;\leq\; \varepsilon\,. \tag{28}$$

Beweis. Durch eine lineare Substitution $x = \alpha t + \beta$ kann $J \subseteq (-\pi, \pi)$ erreicht werden. Man setzt f zu einer stetigen Funktion in $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ fort und findet nach dem Satz von Fejér 71.7 a) ein $m \in \mathbb{N}$ und Zahlen $\{t_k\}_{-m \leq k \leq m}$ in $\mathbb{C}$ mit

$$\sup_{x \in J} \,|\, f(x) - \sum_{k=-m}^{m} t_k e^{ikx} \,| \;\leq\; \tfrac{\varepsilon}{2}\,.$$

Aufgrund der auf J gleichmäßig konvergenten Entwicklung $e^{ikx} = \sum\limits_{\ell=0}^{\infty} \frac{(ikx)^\ell}{\ell!}$ folgt dann die Behauptung.

Für $f \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$ kann natürlich $P \in \mathbb{R}[x]$ gewählt werden; notfalls ersetzt man einfach P durch $\operatorname{Re} P$.