72 Orthonormalbasen und Konvergenz im quadratischen Mittel

Wir untersuchen nun die Konvergenz von Fourier-Reihen im quadratischen Mittel in Verbindung mit den zugrunde liegenden elementaren Resultaten über Hilberträume. Letztere sind auch für die mathematischen Grundlagen der Quantenmechanik wichtig (vgl. HM 4). Endlichdimensionale Hilberträume wurden bereits in Abschnitt 15 untersucht, lineare Operatoren auf solchen Räumen in Abschnitt 40.

72.1 Räume quadratintegrierbarer Funktionen. a) Für eine meßbare Menge $A \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$ sei

$$\mathcal{L}_2(A) := \{f \in \mathcal{M}(A, \mathbb{C}) \mid \int_A |f(x)|^2 \, dx < \infty\} \tag{1}$$

der Raum der quadratintegrierbaren Funktionen auf A.

b) Wegen $2|fg(x)| \le |f(x)|^2 + |g(x)|^2$ wird durch

$$\langle f, g \rangle := \int_A f(x) \overline{g(x)} \, dx \tag{2}$$

ein *Halbskalarprodukt* auf $\mathcal{L}_2(A)$ definiert mit

$$\langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ fast überall.} \tag{3}$$

c) Analog zu 56.5 erhält man durch Identifikation fast überall gleicher Funktionen den Raum

$$L_2(A) := \mathcal{L}_2(A)/\mathcal{N}(A), \tag{4}$$

auf dem (2) ein *Skalarprodukt* definiert.

d) Im Zusammenhang mit Fourier-Reihen verwendet man auf $L_2[-\pi, \pi]$ an Stelle von (2) meist das Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} \, dx. \tag{5}$$

72.2 Hilberträume. a) Es sei $\langle \, , \, \rangle$ ein Skalarprodukt auf einem Vektorraum E. Für $x, y \in E$ gilt dann die „binomische Formel"

$$\langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle. \tag{6}$$

b) Weiter hat man die *Schwarzsche Ungleichung*

$$|\langle x, y \rangle|^2 \le \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle, \quad x, y \in E. \tag{7}$$

c) Durch

$$\| x \| := \sqrt{\langle x, x \rangle} \tag{8}$$

wird eine Norm auf E definiert. Ist E unter dieser Norm *vollständig,* so heißt E ein *Hilbertraum.*

d) Die Räume $\mathcal{L}_2(A)$ und $L_2(A)$ sind vollständig; $L_2(A)$ ist ein *Hilbertraum.*

72.3 Orthonormalsysteme. Es sei E ein Hilbertraum und Z eine Indexmenge.

a) Eine Menge von Vektoren $\{v_k\}_{k\in Z} \subseteq E$ heißt *Orthonormalsystem (ONS),* falls $\langle v_k, v_\ell\rangle = \delta_{k\ell}$ für $k,\ell \in Z$ gilt.

b) Nach (71.5) sind die Funktionen $\{e^{ikx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ ein ONS in $L_2[-\pi,\pi]$. Die Skalarprodukte

$$\langle f, e^{ikx}\rangle \;=\; \widehat{f}(k) \;=\; \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx}\, dx \tag{9}$$

sind gerade die *Fourier-Koeffizienten* von $f \in L_2[-\pi,\pi]$; daher werden auch für ein allgemeines ONS $\{v_k\}_{k\in Z}$ in E die Zahlen $\widehat{x}(k) := \langle x, v_k\rangle$ Fourier-Koeffizienten von $x \in E$ bezüglich $\{v_k\}_{k\in Z}$ genannt.

c) Für ein *endliches ONS* $\{v_k\}_{k\in Z'}$ in E und $\xi_k \in \mathbb{K}$ gilt der *Satz des Pythagoras*

$$\| \sum_{k\in Z'} \xi_k\, v_k \|^2 \;=\; \sum_{k\in Z'} |\,\xi_k\,|^2 . \tag{10}$$

Insbesondere ist ein ONS $\{v_k\}_{k\in Z'}$ linear unabhängig.

d) Für Vektoren $x \in E$ ergibt sich aus (6) und (10)

$$\|\, x - \sum_{k\in Z'} \widehat{x}(k) v_k \,\|^2 \;=\; \|\, x\,\|^2 - \sum_{k\in Z'} |\,\widehat{x}(k)\,|^2 . \tag{11}$$

Aus (11) ergibt sich sofort die

72.4 Satz (Besselsche Ungleichung). *Es seien Z eine Indexmenge und $\{v_k\}_{k\in Z}$ ein ONS in E. Für jede endliche Teilmenge $Z' \subseteq Z$ gilt dann*

$$\sum_{k\in Z'} |\,\widehat{x}(k)\,|^2 \;\le\; \|\, x\,\|^2 , \quad x \in E . \tag{12}$$

Wir untersuchen nun, motiviert durch konkrete Fourier-Reihen, durch $\mathbb{Z}$ indizierte abzählbare ONSe; statt dessen kann man auch andere abzählbare Indexmengen, insbesondere $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{N}_0$ betrachten.

72.5 Orthogonale Summen. Es sei $\{v_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ ein ONS in einem Hilbertraum E. Für Zahlen $\xi_k \in \mathbb{K}$ mit $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\,\xi_k\,|^2 < \infty$ ist dann die aus paarweise orthogonalen Summanden bestehende Reihe $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \xi_k\, v_k$ in E *konvergent;* in der Tat bilden die Partialsummen eine Cauchy-Folge wegen

$$\| \sum_{n\le |\,k\,|\le m} \xi_k\, v_k \|^2 \;=\; \sum_{n\le |\,k\,|\le m} |\,\xi_k\,|^2 .$$

Wie bei absolut konvergenten skalaren Reihen (vgl. Theorem 28.17) ist hier die Konvergenz *unbedingt,* d. h. alle Umordnungen der Reihe konvergieren gegen die gleiche Summe. Eine solche orthogonale Summe ist daher über beliebige abzählbare Indexmengen definiert.

72.6 Theorem. *Für ein ONS $\{v_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ in einem Hilbertraum E sind äquivalent:*

(a) Für alle $x \in E$ gilt die Fourier-Entwicklung

$$x \;=\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{x}(k) v_k \;=\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle x, v_k\rangle\, v_k . \tag{13}$$

(b) Für alle $x \in E$ gilt die Parsevalsche Gleichung

$$\| x \|^2 \; = \; \sum_{k=-\infty}^{\infty} | \widehat{x}(k) |^2 . \tag{14}$$

(c) Der Raum $[v_k]_{k\in\mathbb{Z}}$ ist dicht in E.

(d) Das ONS $\{v_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ ist maximal, d. h. es gilt $\{v_k\}_{k\in\mathbb{Z}}^{\perp} = \{0\}$.

Beweis. „(a) $\Leftrightarrow$ (b)" folgt sofort aus (11), „(a) $\Rightarrow$ (c)" ist klar.
„(c) $\Rightarrow$ (d)": Für $x \in \{v_k\}_{k\in\mathbb{Z}}^{\perp}$ gilt $\langle x, v\rangle = 0$ für alle $v \in [v_k]_{k\in\mathbb{Z}}$ und somit $x = 0$.
„(d) $\Rightarrow$ (a)": Für $x \in E$ setzen wir $x_1 := \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{x}(k) v_k \in E$. Dann ist $\langle x - x_1, v_k\rangle = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ und somit $x - x_1 = 0$.

72.7 Orthonormalbasen. Ein ONS $\{v_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ in einem Hilbertraum E heißt *Orthonormalbasis (ONB)* von E, falls die Aussagen (a)-(d) aus Theorem 72.6 gelten.

72.8 Separable Räume. Es sei E ein normierter Raum. Eine Menge $M \subseteq E$ heißt *separabel,* wenn es eine in M *dichte abzählbare Menge* $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ gibt. Teilmengen separabler Räume sind wieder separabel (vgl. [K2], Satz 4.10). Die Räume $L_1(A)$ und $L_2(A)$ sind für alle meßbaren Mengen $A \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$ separabel (vgl. [K3], Satz 10.5).

72.9 Satz. *Ein Hilbertraum E ist genau dann separabel, wenn er eine abzählbare ONB besitzt.*

Beweis. „$\Rightarrow$": Es sei $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ eine in E dichte abzählbare Menge. Durch Weglassen geeigneter Vektoren erhält man eine Folge *linear unabhängiger* Vektoren, deren lineare Hülle in E dicht ist und daraus durch *Gram-Schmidt-Orthonormalisierung* (vgl. 15.10) eine ONB von E.
„$\Leftarrow$": Für eine ONB $\{v_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ von E ist die Menge $\{\sum\limits_{k=-n}^{n} \xi_k v_k \mid n \in \mathbb{N}, \, \xi_k \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}\}$ abzählbar und dicht in E.

Nicht separable Hilberträume besitzen überabzählbare Orthonormalbasen. Allerdings sind alle in der Quantenmechanik auftretenden Hilberträume separabel, und dies gilt auch für die allermeisten in der Analysis vorkommenden Hilberträume.

Nun können wir ähnlich wie in 15.9 orthogonale Projektionen auf beliebige abgeschlossene Unterräume konstruieren:

72.10 Theorem. *Es seien E ein separabler Hilbertraum und $F \subseteq E$ ein abgeschlossener Unterraum.*

a) Zu $x \in E$ gibt es genau einen Vektor $Px \in F$ mit der Eigenschaft $x - Px \perp F$. Mit einer ONB $\{v_k\}_{k\in Z}$ von F ist diese gegeben durch

$$Px := \; P_F x := \sum_{k\in Z} \widehat{x}(k) \, v_k \; = \; \sum_{k\in Z} \langle x, v_k\rangle \, v_k \, , \quad x \in E . \tag{15}$$

b) Unter allen Vektoren $y \in F$ *wird der* Abstand $\| x - y \|$ *genau für* $y = Px$ minimal. *Insbesondere gilt*

$$\| x - Px \| \; = \; d_F(x) \; \leq \; \| x - y \| \quad \textit{für alle} \;\; y \in F\,. \tag{16}$$

c) Die orthogonale Projektion $P : E \mapsto F$, $P(x) := Px$, *ist linear mit* $\| P \| = 1$ *und* $P(x) = x$ *für* $x \in F$. *Für* $x, y \in E$ *gilt*

$$\langle Px, y \rangle \; = \; \langle Px, Py \rangle \; = \; \langle x, Py \rangle\,. \tag{17}$$

Man hat $R(P) = F$ *und* $N(P) = F^{\perp}$ *sowie die* direkte *Zerlegung*

$$E \; = \; F \oplus F^{\perp}\,. \tag{18}$$

Beweis. a) Nach Satz 72.9 besitzt F eine ONB, und nach 72.5 ist die Summe in (15) erklärt. Nun rechnet man $\langle x - P_F x, v_\ell \rangle = 0$ für $\ell \in Z$ einfach nach. Ist auch $y \in F$ mit $x - y \perp F$, so folgt $P_F x - y \in F$ und auch $P_F x - y = (P_F x - x) + (x - y) \in F^{\perp}$, also $P_F x - y = 0$.

b) Für $x \in E$ und $y \in F$ gilt auch $z := y - P_F x \in F$. Mit dem Satz des Pythagoras folgt

$$\| x - y \|^2 \; = \; \| x - P_F x - z \|^2 \; = \; \| x - P_F x \|^2 + \| z \|^2\,, \tag{19}$$

und dies ist genau für $\| z \|^2 = 0$ minimal.

c) Offenbar ist $P_F : E \to F$ linear. Mit $y = 0$ in (19) ist $z = -P_F x$, und man erhält $\| P_F x \| \leq \| x \|$ für alle $x \in E$. Wegen (15) gilt $P_F(x) = x$ für $x \in F$ und $P_F x = 0$ für $x \in F^{\perp}$. Formel (17) folgt aus $\langle Px, y - Py \rangle = \langle x - Px, Py \rangle = 0$, und (18) ergibt sich aus $x = Px + (I - P)x$.

Nun kommen wir auf konkrete Fourier-Reihen zurück:

72.11 Theorem. *Die Funktionen* $\{e^{ikx}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ *bilden eine Orthonormalbasis des Hilbertraums* $L_2[-\pi, \pi]$. *Für* $f \in L_2[-\pi, \pi]$ *konvergiert also die Fourier-Reihe im quadratischen Mittel gegen* f, *d.h. es gilt*

$$\| f - \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{ikx} \|_2 \to 0 \quad \textit{für} \;\; n \to \infty\,. \tag{20}$$

Man hat die Parsevalsche Gleichung

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} | \widehat{f}(k) |^2 \; = \; \| f \|_2^2 \; = \; \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} | f(x) |^2 \, dx\,, \tag{21}$$

und für $f, g \in L_2[-\pi, \pi]$ *gilt*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) \, \overline{\widehat{g}(k)} \; = \; \langle f, g \rangle \; = \; \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, \overline{g(x)} \, dx\,. \tag{22}$$

Beweis. Die Dichtheit von $[e^{ikx}]_{k \in \mathbb{Z}}$ folgt aus dem Satz von Fejér 71.7 a) und der Dichtheit von $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ in $L_2[-\pi, \pi]$. Formel (22) ergibt sich aus (21) mittels der *Polarformel*

$$4 \langle f, g \rangle \; = \; \| f + g \|^2 - \| f - g \|^2 + i \| f + ig \|^2 - i \| f - ig \|^2\,. \tag{23}$$

72.12 Beispiele und Bemerkungen. a) Mit den Koeffizienten a_k, b_k der *reellen* Fourier-Entwicklung von $f \in \mathcal{L}_2[-\pi,\pi]$ (vgl. (71.1) – (71.4)) gilt die Parsevalsche Gleichung in der Form

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2 \;=\; \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx\,. \tag{24}$$

b) Aus der Entwicklung $\frac{\pi-x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$ für $0 < x < 2\pi$ (vgl. (71.25)) ergibt sich die *Eulersche Formel*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \;=\; \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi - x}{2}\right)^2 dx \;=\; \frac{\pi^2}{6}\,. \tag{25}$$

72.13 Satz. *Für $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^1_{st}(\mathbb{R})$ gilt*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\,\widehat{f}(k)\,| < \infty\,; \tag{26}$$

insbesondere konvergiert die Fourier-Reihe von f gleichmäßig gegen f.

Beweis. Partielle Integration liefert

$$\widehat{f}(k) \;=\; \frac{1}{ik}\, \widehat{f'}(k)\,, \tag{27}$$

da sich die ausintegrierten Terme wegen der 2π–Periodizität wegheben. Aus der Schwarzschen Ungleichung im $\mathbb{R}^{2n}$ und der Besselschen Ungleichung folgt weiter

$$\sum_{|k|=1}^{n} |\,\widehat{f}(k)\,| \;=\; \sum_{|k|=1}^{n} \frac{1}{|k|} |\,\widehat{f'}(k)\,| \;\le\; \Big(\sum_{|k|=1}^{n} \frac{1}{|k|^2}\Big)^{1/2} \Big(\sum_{|k|=1}^{n} |\,\widehat{f'}(k)\,|^2\Big)^{1/2} \;\le\; \frac{\pi}{\sqrt{3}} \|\, f'\,\|_2\,.$$

72.14 Satz. *Für $f \in L_2[-\pi,\pi]$ konvergiert die Fourier-Reihe auch in der L_1-Norm gegen f. Für $-\pi \le a < b \le \pi$ gilt*

$$\int_a^b f(x)\, dx \;=\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) \int_a^b e^{ikx}\, dx\,. \tag{28}$$

Beweis. Für Funktionen $h \in L_2[-\pi,\pi]$ gilt nach der Schwarzschen Ungleichung

$$\int_a^b |\,h(x)\,|\, dx \;\le\; \int_{-\pi}^{\pi} |\,h(x)\,|\, dx \;\le\; \sqrt{2\pi}\, \Big(\int_{-\pi}^{\pi} |\,h(x)\,|^2\, dx\Big)^{1/2}\,. \tag{29}$$

72.15 Beispiel. a) Ersetzt man x durch $2\pi x$ in (71.25)), so erhält man

$$B_1(x) := \; x - \frac{1}{2} \;=\; -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2k\pi x}{k}\,, \quad 0 < x < 1\,. \tag{30}$$

Wegen Satz 72.14 ist $f(x) := \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k\pi x}{k^2}$ eine Stammfunktion von $2x - 1$ auf $(0,1)$, und es folgt $f(x) = x^2 - x + c$. Wegen

$$\int_0^1 f(x)\, dx \;=\; \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \int_0^1 \cos 2k\pi x\, dx \;=\; 0$$

muß $c = \frac{1}{6}$ sein, und es folgt

$$B_2(x) := \; x^2 - x + \frac{1}{6} \;=\; \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k\pi x}{k^2}\,, \quad 0 < x < 1\,. \tag{31}$$

Da beide Seiten von (31) auf $\mathbb{R}$ stetige Funktionen definieren, gilt (31) sogar für $x \in [0,1]$. Mit $x = 0$ erhält man wieder (25), und $x = \frac{1}{2}$ liefert

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \;=\; 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - + \cdots \;=\; \frac{\pi^2}{12}\,. \tag{32}$$

b) Durch weitere Integration von (31) kann man auch die Summen $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^m}$ für *gerade* $m \in \mathbb{N}$ berechnen, vgl. dazu auch (74.9).

Eine Anwendung der Parsevalschen Gleichung und der Flächenformel (61.17) ist die Lösung des *isoperimetrischen Problems* nach A. Hurwitz:

72.16 Satz. *Für Gebiete $G \in \mathfrak{G}_{st}(\mathbb{R}^2)$ mit stückweise glattem Rand in der Ebene ist*

$$\lambda(G) \;\le\; \tfrac{1}{4\pi}\,\mathsf{L}(\partial G)^2\,, \tag{33}$$

und Gleichheit gilt nur für Kreise.

Beweis. Man kann annehmen, daß ∂G nur aus *einer* Kurve besteht und daß $\mathsf{L}(\partial G) = 2\pi$ gilt; dann ist $\lambda(G) \le \pi$ zu zeigen. Für die ausgezeichnete Parametrisierung $\gamma = x + iy \in \mathcal{C}^1_{st}([0,2\pi],\mathbb{C})$ von ∂G gilt $\widehat{\gamma'}(0) = 0$ sowie $|\,\gamma'(s)\,| = 1$ für $s \in [0,2\pi]$. Aus der Flächenformel (61.17), der Parsevalschen Gleichung (22) und Formel (27) ergibt sich

$$\begin{aligned}
\lambda(G) \;&=\; \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} (x(s)\,y'(s) - y(s)\,x'(s))\,ds \;=\; \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Im}\int_0^{2\pi} \gamma'(s)\,\overline{\gamma}(s)\,ds \\
&=\; \pi\,\mathrm{Im}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{\gamma'}(k)\,\overline{\widehat{\gamma}}(k) \;=\; \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} k\,|\,\widehat{\gamma}(k)\,|^2 \\
&\le\; \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2\,|\,\widehat{\gamma}(k)\,|^2 \;=\; \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\,\widehat{\gamma'}(k)\,|^2 \;=\; \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} |\,\gamma'(s)\,|^2\,ds \\
&=\; \pi\,.
\end{aligned}$$

Dabei hat man nur dann Gleichheit, wenn $\widehat{\gamma}(k) = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0,1\}$ ist, und dann parametrisiert $\gamma(s) = \widehat{\gamma}(0) + \widehat{\gamma}(1)\,e^{is}$ eine Kreislinie.