73 Punktweise Konvergenz

73.1 Lemma (Riemann-Lebesgue). *Für* $f \in \mathcal{L}_1[a,b]$ *gilt*

$$\lim_{|\lambda| \to \infty} \int_a^b f(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx \;=\; 0\,. \tag{1}$$

Beweis. Für $\mathcal{C}^1$-Funktionen mit $f(a) = f(b) = 0$ folgt dies mittels partieller Integration, für beliebige $\mathcal{L}_1$-Funktionen daraus durch Approximation.

Die Fourier-Reihe einer Funktion $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ ist i. a. *nicht* punktweise konvergent. Nach dem Satz von Fejér konvergieren allerdings die arithmetischen Mittel der Partialsummen in $x \in \mathbb{R}$, wenn nur $f \in \mathcal{L}_1[-\pi,\pi]$ gilt und die einseitigen Grenzwerte

$$\widetilde{f}(x^{\pm}) := \lim_{t \to x^{\pm}} \widetilde{f}(t)$$

existieren. Ist die Konvergenz $\widetilde{f}(x+t) \to \widetilde{f}(x^+)$ und $\widetilde{f}(x-t) \to \widetilde{f}(x^-)$ für $t \to 0^+$ *„schnell genug"*, so konvergiert die Fourier-Reihe selbst in $x \in \mathbb{R}$:

73.2 Satz (Dini). *Es seien* $f \in \mathcal{L}_1[-\pi,\pi]$ *und* $x \in \mathbb{R}$, *so daß*

$$t \mapsto \tfrac{\widetilde{f}(x-t)-\widetilde{f}(x^-)}{t} \in \mathcal{L}_1[0,\pi] \quad \textit{und} \quad t \mapsto \tfrac{\widetilde{f}(x-t)-\widetilde{f}(x^+)}{t}\, dt \in \mathcal{L}_1[-\pi,0] \tag{2}$$

gilt. Dann hat man $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\, e^{ikx} = f^*(x)$.

Beweis. Nach dem Lemma von Riemann-Lebesgue gilt

$$\begin{aligned} s_n(f;x) - f^*(x) \;&=\; \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\widetilde{f}(x-t) - \widetilde{f}(x^-)}{\sin\frac{t}{2}} \sin(2n+1)\frac{t}{2}\, dt \\ &+\; \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} \frac{\widetilde{f}(x-t) - \widetilde{f}(x^+)}{\sin\frac{t}{2}} \sin(2n+1)\frac{t}{2}\, dt \;\to\; 0\,. \end{aligned}$$

73.3 Folgerung (Lipschitz). *Für* $f \in \mathcal{L}_1[-\pi,\pi]$ *erfülle* $\widetilde{f}$ *für ein* $0 < \alpha \le 1$ *in* $x \in \mathbb{R}$ *die (einseitige)* Hölder-Bedingung

$$\exists\, \eta > 0\,,\, C > 0\ \forall\, t \in [0,\eta]\ :\ |\,\widetilde{f}(x \pm t) - \widetilde{f}(x^{\pm})\,| \;\le\; C\,|\,t\,|^{\alpha}\,. \tag{3}$$

Dann gilt $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\, e^{ikx} = f^*(x)$.

73.4 Folgerung (Riemannscher Lokalisierungssatz). *Gegeben seien Funktionen* $g,h \in \mathcal{L}_1[-\pi,\pi]$. *Stimmen* $\widetilde{g}$ *und* $\widetilde{h}$ *auf einem kleinen Intervall um* $x \in \mathbb{R}$ *überein, so gilt* $\sum\limits_{k=-n}^{n} (\widehat{g}(k) - \widehat{h}(k))\, e^{ikx} \to 0$.

Beweis. Für ein $\eta > 0$ gilt $\widetilde{g}(s) - \widetilde{h}(s) = 0$ für $|\,s - x\,| \le \eta$; die Funktion $f := g - h$ erfüllt also Bedingung (3).

Die *Konvergenz* der Fourier-Reihe einer Funktion $f \in \mathcal{L}_1[-\pi,\pi]$ in einem speziellen Punkt $x \in \mathbb{R}$ hängt also nur vom *Verhalten* von f *in der Nähe von* x ab, obwohl für die Bestimmung der Fourier-Koeffizienten $(\widehat{f}(k))$ nach (71.6) *alle* Funktionswerte von f auf $[-\pi,\pi]$ benötigt werden.

73.5 Satz (Dirichlet-Jordan). *Es seien* $f \in \mathcal{L}_1[-\pi,\pi]$ *und* $x \in \mathbb{R}$, *so daß* $\widetilde{f}$ *auf einem Intervall* $[x-\delta, x+\delta]$ *als Differenz zweier monotoner Funktionen geschrieben werden kann. Dann gilt* $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\, e^{ikx} = f^*(x)$.

Beweis-Skizze. Nach dem Riemannschen Lokalisierungssatz kann man annehmen, daß f auf ganz $[-\pi,\pi]$ als Differenz zweier monotoner Funktionen geschrieben werden kann. Dies impliziert die Abschätzung $|\,\widehat{f}(k)\,| = O(\frac{1}{k})$; zusammen mit dem Satz von Fejér liefert dies dann die Behauptung.

73.6 Beispiele. a) Bedingung (3) ist insbesondere dann erfüllt, wenn $\widetilde{f}$ in x (einseitig) *differenzierbar* ist, aber auch etwa von der Funktion $x \mapsto \begin{cases} 1+\sqrt{x} & , \quad x \ge 0 \\ \sqrt[3]{x}\,\cos\frac{1}{x} & , \quad x < 0 \end{cases}$ in 0. Diese lässt sich nicht als Differenz zweier monotoner Funktionen schreiben.

b) Umgekehrt erfüllen die in 0 stetigen Funktionen $x \mapsto (-\log|\,x\,|)^{-p}$, $p > 0$ die Voraussetzungen des Satzes von Dirichlet-Jordan in 0, nicht aber die Dini-Bedingung (2).