74 Anwendungen und numerische Aspekte

74.1 Beispiel. Für $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ wird die Fourier-Entwicklung der geraden Funktion $c_z \in \mathcal{C}[-\pi,\pi]$, $c_z(x) := \cos zx$ berechnet. Man hat $b_k = 0$ und

$$\begin{aligned} a_k &= \tfrac{2}{\pi}\textstyle\int_0^\pi \cos zx \cos kx\,dx = \tfrac{1}{\pi}\int_0^\pi (\cos(z+k)x + \cos(z-k)x)\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\, z \sin z\pi\, \frac{(-1)^k}{z^2-k^2}\,. \end{aligned}$$

Wegen $|\,a_k\,| = O(\frac{1}{k^2})$ folgt sofort

$$\cos zx = \frac{2}{\pi}\, z\sin z\pi \left(\frac{1}{2z^2} + \sum_{k=1}^\infty (-1)^k \frac{\cos kx}{z^2-k^2}\right), \quad x \in [-\pi,\pi]\,. \tag{1}$$

74.2 Partialbruchzerlegung des Kotangens. Setzt man $x = \pi$ in (1) und dividiert durch $\sin z\pi$, so ergibt sich $\cot z\pi = \frac{\cos z\pi}{\sin z\pi} = \frac{2z}{\pi}\left(\frac{1}{2z^2} + \sum\limits_{k=1}^\infty (-1)^k \frac{(-1)^k}{z^2-k^2}\right)$ und damit die *Partialbruchzerlegung des Kotangens*

$$\pi\cot\pi z = \frac{1}{z} + 2z\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{z^2-k^2}\,, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}\,. \tag{2}$$

Für einen kompakten Kreis $K := \overline{K}_r(0) \subseteq \mathbb{C}$ gilt $\min\limits_{z\in K} |\,z^2-k^2| \geq \frac{k^2}{2}$ für $k \geq 2r$, so daß die Reihe $\sum\limits_{k\geq 2r} \frac{1}{z^2-k^2}$ auf K absolut und gleichmäßig konvergent ist.

74.3 Potenzreihenentwicklung des Kotangens. Die Terme in (2) werden nun in Potenzreihen um 0 entwickelt. Für $|\,z\,| < 1$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\tfrac{1}{z^2-k^2} = -\tfrac{1}{k^2}\left(1-\tfrac{z^2}{k^2}\right)^{-1} = -\tfrac{1}{k^2}\sum_{n=0}^\infty \tfrac{z^{2n}}{k^{2n}} = -\sum_{n=0}^\infty \tfrac{z^{2n}}{k^{2n+2}}\,.$$

Aus (2) folgt somit

$$\pi z\cot\pi z = 1 + 2z^2\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{z^2-k^2} = 1 - 2\sum_{k=1}^\infty\sum_{n=0}^\infty \frac{z^{2n+2}}{k^{2n+2}}\,. \tag{3}$$

Die letzte *Doppelreihe* ist *absolut konvergent* wegen

$$\sum_{k=1}^m\sum_{n=1}^m \frac{|\,z\,|^{2n}}{k^{2n}} \leq \sum_{k=1}^m \frac{|\,z\,|^2}{k^2}\,\frac{1}{1-\frac{|\,z\,|^2}{k^2}} = \sum_{k=1}^m \frac{|\,z\,|^2}{k^2-|\,z\,|^2} \leq C = C(z)$$

für alle $m \in \mathbb{N}$. Daher kann *die Reihenfolge der Summation vertauscht* werden, und mit der *Riemannschen Zeta–Funktion*

$$\zeta(s) := \sum_{k=1}^\infty \tfrac{1}{k^s}\,, \quad \operatorname{Re} s > 1\,, \tag{4}$$

ergibt sich

$$\pi z\cot\pi z = 1 - 2\sum_{n=1}^\infty \zeta(2n)\, z^{2n}\,, \quad |\,z\,| < 1\,. \tag{5}$$

Wegen $|\,\pi x\cot\pi x\,| \to \infty$ für $x \to 1^-$ ist der Konvergenzradius der Reihe $\rho = 1$.

74.4 Bernoulli–Zahlen. a) Die Funktion $f : z \mapsto \frac{z}{e^z-1}$ ist auf $\mathbb{C}$ meromorph mit Polen in $\{2\pi k i \mid k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}\}$, da die Singularität in 0 hebbar ist. Folglich hat f in 0 eine Potenzreihenentwicklung mit Konvergenzradius 2π :

b) Für $k \in \mathbb{N}_0$ werden die *Bernoulli–Zahlen* B_k definiert durch

$$\frac{z}{e^z-1} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!}\, z^k\,, \qquad |\,z\,| < 2\pi\,. \tag{6}$$

Diese traten bereits bei der Stirlingschen Formel auf. Wie in Abschnitt 59 hat man:

c) Die Bernoulli–Zahlen sind *rational.* Es gilt die *Rekursionsformel*

$$B_0 = 1\,, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k \;=\; 0\,,\; n \in \mathbb{N}\,. \tag{7}$$

Wegen $\frac{e^z-1}{z} = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{(j+1)!}$ folgt dies in der Tat aus

$$\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{B_k}{k!} z^k\Big) \Big(\sum_{j=0}^{\infty} \tfrac{z^j}{(j+1)!}\Big) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \tfrac{B_k}{k!(n-k+1)!}\, z^n \;=\; 1\,.$$

d) Man hat $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_3 = 0$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_5 = 0$, $B_6 = \frac{1}{42}$, $B_7 = 0$, $B_8 = -\frac{1}{30}$, $B_9 = 0$, $B_{10} = \frac{5}{66}$. Da

$$B_0 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{B_k}{k!}\, z^k \;=\; \frac{z}{e^z-1} + \frac{z}{2} \;=\; \frac{z}{2}\,\frac{\cosh\frac{z}{2}}{\sinh\frac{z}{2}}$$

eine *gerade* Funktion ist, gilt $B_{2k+1} = 0$ für $k \in \mathbb{N}$.

74.5 Eulersche Formeln. a) Für $|\,z\,| < \pi$ hat man

$$\begin{aligned} z\cot z \;&=\; z\,\frac{\cos z}{\sin z} \;=\; zi\,\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}} \;=\; iz\,\frac{e^{2iz}+1}{e^{2iz}-1} \\ &=\; iz + \frac{2iz}{e^{2iz}-1} \;=\; iz + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!}\,(2iz)^k \\ &=\; 1 + iz - \frac{1}{2}\cdot 2iz + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{B_k}{k!}\,(2iz)^k \;=\; 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{B_k}{k!}\,(2iz)^k \\ &=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!}\, z^{2n}\,. \end{aligned} \tag{8}$$

b) Durch Vergleich mit (5) ergibt sich daraus

$$\zeta(2n) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} \;=\; (-1)^{n-1} B_{2n}\, \frac{2^{2n-1}}{(2n)!}\, \pi^{2n}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{9}$$

c) Insbesondere hat man $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} = 1.64493\ldots$, $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} = 1.08232\ldots$, $\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945} = 1.01734\ldots$, $\zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450} = 1.00408\ldots$, $\zeta(10) = \frac{\pi^{10}}{93555} = 1.00099\ldots$.

74.6 Produktdarstellung des Sinus. Für $x \in \mathbb{R}$ mit $|\,x\,| < 1$ gilt

$$\pi \int_0^x \big(\cot \pi t - \tfrac{1}{\pi t}\big)\, dt \;=\; \big(\log|\sin \pi t\,| - \log|\,\pi t\,|\big)\Big|_0^x \;=\; \log \tfrac{\sin \pi x}{\pi x}\,,$$

und dies stimmt nach (2) überein mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^x \frac{2t}{t^2-k^2}\,dt \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \log|\,t^2-k^2\,||_0^x \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \log\frac{k^2-x^2}{k^2}\,.$$

Anwendung der Exponentialfunktion liefert dann die *Produktdarstellung des Sinus*

$$\sin\pi x \;=\; \pi x \prod_{k=1}^{\infty}(1-\frac{x^2}{k^2})\,, \quad -1<x<1\,. \tag{10}$$

Nach dem Identitätssatz gilt dies sogar für alle $x\in\mathbb{C}$. Für $x=\frac{1}{2}$ ergibt sich

$$1 \;=\; \frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{\infty}(1-\frac{1}{4k^2}) \;=\; \frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)\,(2k+1)}{(2k)^2}$$

und damit die *Wallissche Produktformel* für $\frac{\pi}{2}$:

$$\frac{\pi}{2} \;=\; \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} \;=\; \lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdot\frac{8\cdot 8}{7\cdot 9}\cdots\,. \tag{11}$$

74.7 Trigonometrische Interpolation. a) Für $2m+1$ *äquidistante Stützstellen*

$$x_j \;=\; \tfrac{2\pi j}{2m+1}\,, \quad m\in\mathbb{N}_0\,, \quad j=-m,\ldots,m \tag{12}$$

in $[-\pi,\pi]$ und *Stützwerte* $y_{-m},\ldots,y_m\in\mathbb{C}$ wird ein *trigonometrisches Polynom*

$$T(x) \;=\; \sum_{k=-m}^{m} c_k e^{ikx} \tag{13}$$

gesucht mit der Eigenschaft

$$T(x_j) \;=\; y_j\,, \quad j=-m,\ldots,m\,. \tag{14}$$

b) Mit der $(2m+1)$-ten *Einheitswurzel* $\epsilon := e^{i\frac{2\pi}{2m+1}}$ gilt $\epsilon^j = e^{ix_j}$. Man hat die *diskreten Orthogonalitätsrelationen*

$$\sum_{k=-m}^{m}\epsilon^{jk} \;=\; \epsilon^{-jm}\sum_{k=0}^{2m}\epsilon^{jk} \;=\; (2m+1)\,\delta_{0j} \quad \text{für } |\,j\,|\le 2m\,. \tag{15}$$

Daher hat das Gleichungssystem (14)

$$\sum_{k=-m}^{m} c_k\,\epsilon^{jk} \;=\; y_j\,, \quad j=-m,\ldots,m\,,$$

die *eindeutige Lösung*

$$c_k := \tfrac{1}{2m+1}\sum_{\ell=-m}^{m} y_\ell\,\epsilon^{-\ell k}\,, \quad k=-m,\ldots,m\,. \tag{16}$$

Die dadurch definierte Abbildung

$$\mathcal{F}_m\in L(\mathbb{C}^{2m+1})\,, \quad \mathcal{F}_m : (y_{-m},\ldots,y_m)\mapsto(c_{-m},\ldots,c_m)\,, \tag{17}$$

heißt auch *diskrete Fourier-Transformation.*

c) Natürlich kann man die o. a. Formeln auch *reell* formulieren (vgl. (71.4) – (71.4)).

d) Für $f\in\mathcal{L}_1[-\pi,\pi]$ und $y_j := f(x_j)$, $j=-m,\ldots,m$, ist c_k genau die *Approximation* von $\widehat{f}(k)$ mittels der *Trapezregel* (vgl. 31.7).

e) Die Berechnung der c_k in (16) erfordert etwa $O(m^2)$ arithmetische Operationen. Dieser Aufwand läßt sich auf die Größenordnung $O(m\log m)$ reduzieren (*schnelle Fourier-Transformation FFT*).