75 Die Fourier-Transformation

75.1 Motivation. Für eine $2\pi\ell$-periodische Funktion mit $f|_{[-\ell\pi,\ell\pi]} \in \mathcal{L}_1[-\ell\pi,\ell\pi]$ ist die Funktion $y \mapsto f(\ell y)$ 2π-periodisch und hat daher eine Fourier-Entwicklung $f(\ell y) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{iky}$. Mit $x = \ell y$ ergibt sich daraus die Entwicklung

$$f(x) \;\sim\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{i\frac{k}{\ell}x} \tag{1}$$

nach den *Frequenzen* $\{\frac{k}{\ell} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ mit den Koeffizienten

$$c_k \;=\; \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\ell y)\, e^{-iky}\, dy \;=\; \tfrac{1}{2\pi\ell} \int_{-\pi\ell}^{\pi\ell} f(x)\, e^{-i\frac{k}{\ell}x}\, dx\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,. \tag{2}$$

Mit $g_\ell(\xi) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi\ell}^{\pi\ell} f(x)\, e^{-ix\xi}\, dx$ folgt $f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\ell}\, g_\ell(\frac{k}{\ell})\, e^{i\frac{k}{\ell}x}$, und mit $\ell \to \infty$ „ergibt sich“ eine „Fourier-Entwicklung“ oder *„Spektralzerlegung“* nicht notwendig periodischer Funktionen

$$f(x) \;\sim\; \int_{\mathbb{R}} g(\xi)\, e^{ix\xi}\, d\xi \tag{3}$$

nach *allen Frequenzen* $\xi \in \mathbb{R}$ mit den *Amplituden*

$$g(\xi) \;=\; \tfrac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-ix\xi}\, dx\,. \tag{4}$$

Die *Fourier-Transformation* wird hier für Funktionen von *mehreren* Veränderlichen untersucht. Zur Vereinfachung der Formeln wird in (4) als Vorfaktor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ gewählt, und zur Abkürzung sei

$$đx := đ^n x := \;(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\, d^n x\,. \tag{5}$$

75.2 Definition. *Für $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ wird die* Fourier-Transformierte *durch*

$$\mathcal{F}f(\xi) := \;\widehat{f}(\xi) := \;\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-i\langle x,\xi\rangle} đ^n x\,, \quad \xi \in \mathbb{R}^n\,, \tag{6}$$

definiert. Die Abbildung $\mathcal{F} : f \mapsto \widehat{f}$ heißt Fourier-Transformation.

75.3 Beispiele und Bemerkungen. a) Für $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ist $\widehat{f}$ beschränkt mit $\|\,\widehat{f}\,\|_{\sup} \le (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\,\|\,f\,\|_{L_1}$. Aus Satz 56.12 a) folgt die *Stetigkeit* von $\widehat{f}$ auf $\mathbb{R}^n$.

b) Für die charakteristische Funktion $\chi := \chi_{(-1,1)}$ von $(-1,1)$ gilt

$$\widehat{\chi}(\xi) \;=\; \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-ix\xi}\, dx \;=\; \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \frac{e^{-ix\xi}}{-i\xi}\Big|_{-1}^{1} \;=\; \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \frac{e^{i\xi}-e^{-i\xi}}{i\xi} \;=\; \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\, \frac{\sin\xi}{\xi}\,,$$

insbesondere also $\widehat{\chi} \notin \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$.

c) Für die Funktion $f(x) := e^{-|\,x\,|}$ gilt

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) \;&=\; \int_{\mathbb{R}} e^{-|\,x\,|}\, e^{-ix\xi} đx \;=\; \int_0^\infty e^{-x}\,(e^{-ix\xi} + e^{ix\xi}) đx \\ &=\; \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \Big(\frac{e^{-x(1+i\xi)}}{-1-i\xi} + \frac{e^{-x(1-i\xi)}}{-1+i\xi}\Big)\Big|_0^\infty \;=\; \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\, \frac{1}{1+\xi^2}\,. \end{aligned}$$

d) Für $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ gilt aufgrund der Transformationsformel

$$\mathcal{F}(f(x-a))(\xi) \;=\; e^{-i\langle a,\xi\rangle}\, (\mathcal{F}f)(\xi)\,, \quad \xi \in \mathbb{R}^n\,, \quad a \in \mathbb{R}^n\,, \tag{7}$$

$$\mathcal{F}(f(\tfrac{x}{\lambda}))(\xi) \;=\; \lambda^n\, (\mathcal{F}f)(\lambda\xi)\,, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n\,, \quad \lambda > 0\,. \tag{8}$$

e) Der *Gauß-Kern* oder *Wärmeleitungskern* $G \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ ist durch

$$G(x,t) := (2\pi t)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\tfrac{|x|^2}{2t}\right), \quad x \in \mathbb{R}^n, \, t > 0 \tag{9}$$

gegeben. Nach Formel (56.27) gilt $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} e^{-ix\xi}\, dx = \sqrt{2\pi}\, e^{-\xi^2/2}$; für die Funktion $f(x) := e^{-|x|^2/2}$ auf $\mathbb{R}^n$ ergibt sich daraus

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2/2} e^{-i\langle x,\xi\rangle} d\!\!\!{}^-{}^n x = \prod_{k=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} e^{-ix\xi_k} d\!\!\!{}^- x = \prod_{k=1}^n e^{-\xi_k^2/2}, \quad \text{also}$$

$$\mathcal{F}G^1 = G^1. \tag{10}$$

Aus (8)–(10) ergibt sich dann leicht

$$\mathcal{F}G^t(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\tfrac{t|\xi|^2}{2}\right) = t^{-\frac{n}{2}}\, G^{1/t}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \, t > 0. \tag{11}$$

f) Für $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ sind $\widehat{f}, \widehat{g}$ stetig und beschränkt, also $\widehat{f}g$ und $f\widehat{g}$ integrierbar. Der *Satz von Fubini* liefert

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, \widehat{g}(x)\, d^n x &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\, e^{-i\langle y,x\rangle} d\!\!\!{}^-{}^n y\, d^n x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-i\langle y,x\rangle} d\!\!\!{}^-{}^n x\, g(y)\, d^n y, \quad \text{also} \end{aligned}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, \widehat{g}(x)\, d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)\, g(x)\, d^n x. \tag{12}$$

75.4 Theorem (Fourier-Umkehrformel). *Es sei $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$, so daß auch $\widehat{f} \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$ ist. Dann gilt*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\, e^{i\langle x,\xi\rangle} d\!\!\!{}^-{}^n \xi \quad \textit{für fast alle } x \in \mathbb{R}^n. \tag{13}$$

75.5 Beispiele und Bemerkungen. a) Die in (13) auftretende lineare Abbildung

$$\check{\mathcal{F}} : g \mapsto \check{\mathcal{F}}g(x) := \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi)\, e^{i\langle x,\xi\rangle} d\!\!\!{}^-{}^n \xi, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{14}$$

bildet (wie $\mathcal{F}$) L_1-Funktionen in *stetige* beschränkte Funktionen ab. Eine Funktion $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$ mit $\widehat{f} \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$ muß also fast überall mit einer *stetigen* Funktion übereinstimmen, und (13) gilt in allen *Stetigkeitspunkten* von f. Offenbar hat man $\check{\mathcal{F}}f(x) = (\mathcal{F}f)(-x)$, und (13) impliziert $\mathcal{F}^2 f(x) = \check{f}(x) := f(-x)$ sowie $\mathcal{F}^4 f = f$.

b) Aus Beispiel 75.3 c) erhält man die Umkehrformel

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix\xi}}{1+\xi^2}\, d\xi = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x\xi}{1+\xi^2}\, d\xi = e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{15}$$

75.6 Faltung von L_1-Funktionen. a) Für $f, g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$ liegen die Funktionen $F_x : y \mapsto f(x-y)\, g(y)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ in $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$. Durch

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, dy \tag{16}$$

wird die *Faltung* von f und g (fast überall) definiert. Es gilt $f * g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ sowie

$$\| f * g \|_{L_1} \le \| f \|_{L_1} \| g \|_{L_1}. \tag{17}$$

b) Für $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\mathcal{F}(f * g) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} (\widehat{f} \cdot \widehat{g}). \tag{18}$$

In der Tat erhält man mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}\widehat{(f*g)}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\,g(x-y)\,d^ny\,e^{-i\langle x,\xi\rangle}\,đ^nx\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)\,e^{-i\langle x-y,\xi\rangle}đ^nx\,f(y)\,e^{-i\langle y,\xi\rangle}\,d^ny\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\widehat{g}(\xi)\,f(y)\,e^{-i\langle y,\xi\rangle}\,d^ny \;=\; (2\pi)^{\frac{n}{2}}\,\widehat{f}(\xi)\,\widehat{g}(\xi)\,.\end{aligned}$$

c) Aus (18) folgt, daß die Faltung *assoziativ* und *kommutativ* ist; letzteres ergibt sich auch sofort aus (16) mittels der Transformationsformel.

d) Für den *Gauß-Kern* aus (9) gilt $\mathcal{F}(G^t * G^\tau) = \mathcal{F}(G^{t+\tau})$ aufgrund von (11), und Theorem 75.4 liefert

$$G^t * G^\tau \;=\; G^{t+\tau} \quad \text{für} \quad t,\tau>0\,. \tag{19}$$

e) Für $\chi = \chi_{(-1,1)}$ gilt $(\chi*\chi)(x) = (2-|\,x\,|)^+ = \max\{0, 2-|\,x\,|\}$; aus (18) und Beispiel 75.3 b) folgt also $\mathcal{F}((2-|\,x\,|)^+)(\xi) = \sqrt{\frac{8}{\pi}}\,(\frac{\sin\xi}{\xi})^2$. Theorem 75.4 liefert somit

$$\tfrac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\tfrac{\sin\xi}{\xi})^2\,e^{ix\xi}\,d\xi \;=\; \tfrac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\tfrac{\sin\xi}{\xi})^2\,\cos x\xi\,d\xi \;=\; (2-|\,x\,|)^+$$

für $x\in\mathbb{R}$, und für $x=0$ ergibt sich insbesondere

$$\int_{-\infty}^{\infty}(\tfrac{\sin\xi}{\xi})^2\,d\xi \;=\; \pi\,. \tag{20}$$

Die Fourier-Transformation vertauscht die *Differentiation* nach einer Variablen mit der *Multiplikation* mit der entsprechenden Variablen. Dies wird hier nur für *schnell fallende Funktionen* formuliert:

75.7 Definition. *Eine Funktion* $\psi:\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{C}$ *heißt* schnell fallend, *Notation:* $\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, *falls gilt:*

$$\forall\; k\in\mathbb{N}_0\;:\; \|\,\psi\,\|_k := \sup_{|\,\alpha\,|\le k}\,\sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|\,x\,|)^k\,|\,\partial^\alpha\psi(x)\,| < \infty\,. \tag{21}$$

Die Gauß-Kerne G^t aus (9) sind schnell fallend für $t>0$. Mit der Notation $D_j := -i\partial_j$ hat man:

75.8 Satz. *Die Fourier-Transformation* $\mathcal{F}$ *ist ein linearer Isomorphismus von* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *auf* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *mit* $\mathcal{F}^{-1}=\check{\mathcal{F}}=\mathcal{F}^3$. *Für* $\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *gilt*

$$\mathcal{F}(D_j\psi)(\xi) \;=\; \xi_j\,\widehat{\psi}(\xi)\,,\quad \xi\in\mathbb{R}^n\,,\quad \textit{und} \tag{22}$$

$$\mathcal{F}(x_j\psi)(\xi) \;=\; -D_j\widehat{\psi}(\xi)\,,\quad \xi\in\mathbb{R}^n\,. \tag{23}$$

Man kann zeigen, daß $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$ *dicht* ist. Daher ergibt sich aus Satz 75.8 die folgende Variante des *Riemann-Lebesgue Lemmas:*

75.9 Satz. *Für* $f\in\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$ *gilt* $\lim_{|\,\xi\,|\to\infty}\widehat{f}(\xi)=0$.

75.10 Satz (Plancherel). *Für* $f\in L_1(\mathbb{R}^n)\cap L_2(\mathbb{R}^n)$ *gilt auch* $\mathcal{F}f\in L_2(\mathbb{R}^n)$, *und man hat die* Parsevalsche Gleichung

$$\int_{\mathbb{R}^n}|\,f(x)\,|^2\,d^nx \;=\; \int_{\mathbb{R}^n}|\,\widehat{f}(\xi)\,|^2\,d^n\xi\,. \tag{24}$$

Für $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ folgt dies leicht aus (12); der allgemeine Fall ergibt sich dann mittels Approximation.

75.11 Beispiel. Aus Beispiel 75.6 e) ergibt sich leicht

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\tfrac{\sin \xi}{\xi})^4 \, d\xi \;=\; \tfrac{2}{3}\,\pi \,. \tag{25}$$

75.12 Bemerkungen. Die Plancherel-Formel (24) gilt bei geeigneter Interpretation sogar für alle $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$, und die Fourier-Transformation ist ein *unitärer Operator* auf dem Hilbertraum $L_2(\mathbb{R}^n)$:

Für $f \in L_2(\mathbb{R}^n))$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt $f_k(x) := \begin{cases} f(x) & , \quad |\,x\,| \le k \\ 0 & , \quad |\,x\,| > k \end{cases} \in L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$,
und man hat $\|\, f - f_k \,\|_2 \to 0$ für $k \to \infty$. Dann setzt man einfach

$$\mathcal{F}f(\xi) \;=\; \lim_{k\to\infty} \mathcal{F}(f_k)(\xi) \;=\; \lim_{k\to\infty} \int_{|\,x\,|\le k} f(x)\, e^{-i\langle x,\xi\rangle} đx \,, \tag{26}$$

wobei der Limes in $L_2(\mathbb{R}^n)$ zu bilden ist.

Wir konstruieren nun eine Orthonormalbasis des Hilbertraums $L_2(\mathbb{R})$, in der die Fourier-Transformation *diagonalisiert* ist. Die verwendete Methode wird in der Quantenmechanik zur Spektralzerlegung des Hamilton-Operators $-\frac{d^2}{dx^2} + x^2$ des *harmonischen Oszillators* benutzt (vgl. HM 4).

75.13 Hermite-Polynome und -Funktionen. a) Aus (22) und (23) ergibt sich sofort

$$\mathcal{F}\,(x - \tfrac{d}{dx}) \;=\; (-i)\,(x - \tfrac{d}{dx})\,\mathcal{F} \quad \text{auf } \mathcal{S}(\mathbb{R}) \,.$$

Mit dem „Erzeugungsoperator“

$$V := \; x - \tfrac{d}{dx} \;\in\; L(\mathcal{S}(\mathbb{R}))$$

erhält man also aus der Eigenfunktion $g(x) = \exp(-\frac{x^2}{2})$ aus (10) weitere Eigenfunktionen von $\mathcal{F}$ durch $g_k := V^k g$; in der Tat gilt

$$\mathcal{F}g_k \;=\; (-i)^k g_k \,, \quad k \in \mathbb{N} \,. \tag{27}$$

Explizit hat man

$$g_k(x) \;=\; (x - \tfrac{d}{dx})^k \exp(-\tfrac{x^2}{2}) \;=\; H_k(x) \exp(-\tfrac{x^2}{2})$$

mit den *Hermite-Polynomen* H_k vom Grad k. Mit $H_0(x) = 1$ erhält man diese rekursiv durch

$$H_{k+1}(x) \;=\; 2x\, H_k(x) - H_k'(x) \,, \quad k \in \mathbb{N}_0 \,. \tag{28}$$

Somit gilt also

$$H_0(x) = 1\,,\; H_1(x) = 2x\,,\; H_2(x) = 4x^2 - 2\,,\; H_3(x) = 8x^3 - 12x\,,\; \ldots \,.$$

b) Wir wollen nun zeigen, dass die Funktionen g_k in $L_2(\mathbb{R})$ orthogonal sind und ihre Normen berechnen. Wir führen die Operatoren

$$R := \; x + \tfrac{d}{dx} \quad \text{und} \quad N := RV \;=\; -\tfrac{d^2}{dx^2} + x^2 + 1$$

auf $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ein. Die Operatoren R und V sind zueinander adjungiert, d. h. es gilt

$$\langle R\varphi|\psi\rangle \;=\; \int_{\mathbb{R}}(x+\tfrac{d}{dx})\varphi(x)\,\overline{\psi(x)}\,dx \;=\; \int_{\mathbb{R}}\varphi(x)\,\overline{(x-\tfrac{d}{dx})\psi(x)}\,dx \;=\; \langle\varphi|V\psi\rangle \qquad (29)$$

für $\varphi,\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Für den *Kommutator* von R und V gilt

$$[R,V] := RV-VR \;=\; 2 := 2I\,,$$

und daraus ergibt sich auch die Relation

$$[N,V] \;=\; RVV-VRV \;=\; [R,V]V \;=\; 2V\,. \qquad (30)$$

c) Es sei nun $\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ mit $N\psi=\lambda\psi$ für $\lambda\geq 0$. Mit (30) und (29) folgen dann

$$N(V\psi) \;=\; VN\psi+2V\psi \;=\; (\lambda+2)\,V\psi \quad \text{und} \qquad (31)$$

$$\|\,V\psi\,\|^2 \;=\; \langle V\psi|V\psi\rangle \;=\; \langle RV\psi|\psi\rangle \;=\; \langle N\psi|\psi\rangle \;=\; \lambda\,\|\,\psi\,\|^2\,. \qquad (32)$$

d) Offenbar ist $Rg=0$ und daher $Ng=RVg=VRg+2g=2g$. Aus (31) ergibt sich daher $Ng_k=2(k+1)g_k$, und wegen (32) ist

$$\|\,g_k\,\|=\sqrt{2k}\,\|\,g_{k-1}\,\|=\ldots=\sqrt{2^k k!}\,\|\,g\,\|\,.$$

Somit sind die *Hermite-Funktionen*

$$h_k(x) := \;(2^k\,k!\,\sqrt{\pi})^{-\frac12}\,g_k(x) \;=\; (2^k\,k!\,\sqrt{\pi})^{-\frac12}\,H_k(x)\,\exp(-\tfrac{x^2}{2}) \qquad (33)$$

normierte Eigenfunktionen von N zu den Eigenwerten $2(k+1)$, $k\in\mathbb{N}_0$. Diese sind *orthonormal,* da N symmetrisch ist: Für $k>m$ hat man

$$2(k-m)\,\langle h_k|h_m\rangle \;=\; \langle Nh_k|h_m\rangle-\langle h_k|Nh_m\rangle \;=\; 0\,.$$

75.14 Theorem. *Die Hermite-Funktionen bilden eine* Orthonormalbasis *von* $L_2(\mathbb{R})$.

Beweis. a) Nach obigen Überlegungen sind die Hermite-Funktionen ein Orthonormalsystem in $L_2(\mathbb{R})$.

b) Für $\xi\in\mathbb{R}$ gilt die Abschätzung

$$\sum_{k=m+1}^{\infty}|\,\tfrac{1}{k!}\,(-ix\xi)^k\,|\,e^{-\frac{x^2}{2}} \;\leq\; \exp\left(|\,x\,||\,\xi\,|-\tfrac{x^2}{2}\right), \quad m\in\mathbb{N}\,,$$

und der Satz über majorisierte Konvergenz liefert die Entwicklung

$$\exp\left(-ix\xi-\tfrac{x^2}{2}\right) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}\tfrac{1}{k!}\,(-ix\xi)^k\,e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{in} \;\; L_2(\mathbb{R})\,.$$

c) Für $f\in[h_k]^{\perp}$ ist $f\perp x^k\,e^{-\frac{x^2}{2}}$ für alle $k\in\mathbb{N}_0$, und es folgt

$$\mathcal{F}(e^{-\frac{x^2}{2}}\,\bar f)(\xi) \;=\; \int_{\mathbb{R}}e^{-ix\xi}\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,\bar f(x)d\!\!\bar{}x \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}\tfrac{(-i\xi)^k}{k!}\int_{\mathbb{R}}x^k\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,\bar f(x)d\!\!\bar{}x \;=\; 0$$

für alle $\xi\in\mathbb{R}$. Da $\mathcal{F}$ isometrisch ist, impliziert dies $\|\,e^{-\frac{x^2}{2}}\bar f(x)\,\|_{L_2}=0$ und somit $\|\,f\,\|_{L_2}=0$. Folglich ist $\{h_k\}$ ein maximales Orthonormalsystem in $L_2(\mathbb{R})$. $\diamond$

75.15 Spektralzerlegung der Fourier-Transformation. Nach Theorem 75.14 und 72.7 gilt

$$f \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}\langle f,h_k\rangle\,h_k \quad \text{für} \;\; f\in L_2(\mathbb{R})\,, \qquad (34)$$

und mittels $\mathcal{F}h_k=(-i)^k\,h_k$ für $k\in\mathbb{N}_0$ erhält man sofort

$$\mathcal{F}f \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}(-i)^k\,\langle f,h_k\rangle\,h_k \quad \text{für} \;\; f\in L_2(\mathbb{R})\,. \qquad (35)$$