XII. Differentialgleichungen

77 Der Satz von Picard-Lindelöf

Wir beginnen mit einem Existenz- und Eindeutigkeitssatz für gewöhnliche Differentialgleichungen.

77.1 Anfangswertprobleme und Integralgleichungen. a) Es werden *Anfangswertprobleme*

$$\dot{x} \;=\; f(t,x)\,, \quad x(\tau) \;=\; \xi\,, \tag{1}$$

für *Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen* gelöst. Nach 47.1 lassen sich Differentialgleichungen n-ter Ordnung auf Systeme 1. Ordnung umschreiben; entsprechend lassen sich auch $(p\times p)$-Systeme der Ordnung $n \geq 2$ in $(np\times np)$-Systeme erster Ordnung transformieren.

b) In (1) seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{K}^n$ eine Menge, $f \in \mathcal{C}(\Omega,\mathbb{K}^n)$ und $(\tau,\xi)\in\Omega$. Weiter sei $I_0 \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit $\tau \in I_0$. Eine Funktion $\varphi \in \mathcal{C}^1(I_0,\mathbb{K}^n)$ mit $\Gamma(\varphi)\subseteq\Omega$ ist genau dann eine Lösung von (1), wenn φ die folgende *Integralgleichung* löst:

$$\varphi(t) \;=\; \xi + \textstyle\int_\tau^t f(s,\varphi(s))\,ds\,, \quad t\in I_0\,. \tag{2}$$

c) Aus (2) folgt in der Tat sofort $\varphi(\tau)=\xi$ und aufgrund des Hauptsatzes auch $\dot\varphi(t) = f(t,\varphi(t))$ für alle $t\in I_0$. Analog folgt aus (1) umgekehrt

$$\varphi(t) \;=\; \varphi(\tau) + \textstyle\int_\tau^t \dot\varphi(s)\,ds \;=\; \xi + \int_\tau^t f(s,\varphi(s))\,ds\,, \quad t\in I_0\,.$$

Die Integralgleichung (2) ist ein *Fixpunktproblem* für den Operator

$$T : \varphi \mapsto \xi + \textstyle\int_\tau^t f(s,\varphi(s))\,ds\,, \tag{3}$$

das unter geeigneten Voraussetzungen mit Hilfe des *Banachschen Fixpunktsatzes* gelöst werden kann.

77.2 Satz (Banachscher Fixpunktsatz). *Es seien E ein Banachraum, $X\subseteq E$ eine abgeschlossene Teilmenge und $g: X\mapsto X$ eine* Kontraktion, *d.h. es gelte*

$$\exists\; 0\leq q<1\;\forall\; x,y\in X \;:\; \|\,g(x)-g(y)\,\| \leq q\,\|\,x-y\,\|\,. \tag{4}$$

Dann besitzt g genau einen Fixpunkt $x^*\in X$, *d. h. es gibt genau eine Lösung $x^*\in X$ der Gleichung $g(x)=x$. Definiert man zu einem Startpunkt $x_0\in X$ rekursiv $x_n := g(x_{n-1})$, $n\geq 1$, so gilt stets $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$.*

Beweis. a) Es gelte $g(x) = x$ und $g(y) = y$. Aus (4) ergibt sich dann sofort $\| x - y \| = \| g(x) - g(y) \| \le q \| x - y \|$, also $\| x - y \| = 0$.

b) Wegen (4) ist g stetig. Für einen beliebigen Startpunkt $x_0 \in X$ definiert man $x_n := g(x_{n-1}) = g^2(x_{n-2}) = \ldots = g^n(x_0)$, $n \ge 1$. Für $m \ge n$ folgt

$$\begin{aligned} \| x_m - x_n \| &\le \sum_{k=n+1}^{m} \| x_k - x_{k-1} \| = \sum_{k=n+1}^{m} \| g^{k-n}(x_n) - g^{k-n}(x_{n-1}) \| \\ &\le \sum_{k=n+1}^{m} q^{k-n} \| x_n - x_{n-1} \| \le \tfrac{q}{1-q} \| x_n - x_{n-1} \| \qquad (5) \\ &\le \tfrac{q^2}{1-q} \| x_{n-1} - x_{n-2} \| \le \ldots \le q^n \tfrac{\| x_1 - x_0 \|}{1-q}, \qquad (6) \end{aligned}$$

d. h. (x_n) ist eine Cauchy-Folge in X. Da E vollständig ist, existiert der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} x_n =: x^* \in E$, und wegen der Abgeschlossenheit von X gilt $x^* \in X$. Die Behauptung folgt nun aus

$$g(x^*) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x^* .$$

Aus (6) und (5) erhält man mit $m \to \infty$ sofort die *a priori-* und *a posteriori-Fehlerabschätzungen*

$$\| x^* - x_n \| \le \tfrac{q^n}{1-q} \| x_1 - x_0 \| , \quad n \in \mathbb{N}, \qquad (7)$$

$$\| x^* - x_n \| \le \tfrac{q}{1-q} \| x_n - x_{n-1} \| , \quad n \in \mathbb{N}; \qquad (8)$$

man hat also *lineare Konvergenz.*

77.3 Theorem (Picard-Lindelöf). *Es seien $J \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $D \subseteq \mathbb{K}^n$ offen, $\Omega = J \times D$, $(\tau, \xi) \in \Omega$, und für ein $L > 0$ erfülle $f \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{K}^n)$ die* Lipschitz-Bedingung

$$\| f(t, x_1) - f(t, x_2) \| \le L \| x_1 - x_2 \| \quad \textit{für } t \in J, \ x_1, x_2 \in D. \qquad (9)$$

Dann gibt es $\delta > 0$, so daß mit $J_0 := J \cap [\tau - \delta, \tau + \delta]$ das Anfangswertproblem (1) genau eine Lösung $\varphi \in \mathcal{C}^1(J_0, \mathbb{K}^n)$ hat.

Beweis. Man wähle $b > 0$ mit $\overline{K}_b(\xi) \subseteq D$ und dann $\delta > 0$ mit

$$L\delta < 1 \quad \text{und} \quad \delta \| f \|_{J \times \overline{K}_b(\xi)} \le b. \qquad (10)$$

Der Operator T aus (3) ist auf der Menge

$$X := \{ \varphi \in \mathcal{C}(J_0, \mathbb{K}^n) \mid \varphi(J_0) \subseteq \overline{K}_b(\xi) \} \qquad (11)$$

definiert, die in dem Banachraum $\mathcal{C}(J_0, \mathbb{K}^n)$ abgeschlossen ist. Für $\varphi \in X$ und $t \in J_0$ gilt

$$\| (T\varphi)(t) - \xi \| = \| \textstyle\int_\tau^t f(s, \varphi(s))\, ds \| \le \delta \| f \|_{J \times \overline{K}_b(\xi)} \le b,$$

also auch $T\varphi \in X$. Weiter hat man

$$\begin{aligned} \| (T\varphi)(t) - (T\psi)(t) \| &= \| \textstyle\int_\tau^t (f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))\, ds \| \\ &\le | t - \tau | L \| \varphi - \psi \| \le L | J_0 | \| \varphi - \psi \| , \end{aligned}$$

und wegen $L | J_0 | \le L\delta < 1$ ist T eine *Kontraktion.* Die Behauptung folgt somit aus dem Banachschen Fixpunktsatz und 77.1.

77.4 Abhängigkeit von Anfangsdaten und Parametern. a) Der Beweis von Theorem 77.3 ist *konstruktiv:* Man startet mit einem $\varphi_0 \in X$, z. B. $\varphi_0(t) = \xi$, und erhält die Lösung als *gleichmäßigen Limes* der *Iteration*

$$\varphi_{n+1}(t) \;=\; \xi + \textstyle\int_\tau^t f(s, \varphi_n(s))\, ds\,, \quad t \in J_0\,. \tag{12}$$

b) Die Lösung $u(t, \tau, \xi)$ von (1) hängt *lokal stetig* von den Anfangswerten τ und ξ ab und ist genauso glatt wie die vorgegebenen Daten. Ist insbesondere f *analytisch,* so gilt dies auch für u , und man kann die Lösung mittels *Potenzreihenansatz* (näherungsweise) berechnen.

Der Satz von Picard-Lindelöf ist ein *lokaler* Existenz- und Eindeutigkeitssatz. Dies wird in der Formulierung des folgenden Spezialfalls von Theorem 77.3 deutlich:

77.5 Satz. *Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $D \subseteq \mathbb{K}^n$ offen, $\Omega = I \times D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ und $f \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{K}^n)$, so daß $\partial_{x_1} f, \ldots, \partial_{x_n} f$ stetig auf Ω existieren. Für $(\tau, \xi) \in \Omega$ gibt es dann ein Intervall I_0 mit $\tau \in I_0$, so daß das Anfangswertproblem (1)*

$$\dot{x} \;=\; f(t, x)\,, \quad x(\tau) \;=\; \xi\,,$$

genau eine Lösung $\varphi_0 \in \mathcal{C}^1(I_0, \mathbb{K}^n)$ hat.

Dies folgt aus Theorem 77.3, da aufgrund von

$$f(t, x_2) - f(t, x_1) \;=\; \textstyle\int_0^1 D_x f(t, x_1 + s\,(x_2 - x_1))\,(x_2 - x_1)\, ds$$

für $[x_1, x_2] \subseteq D$ (vgl. Satz 50.14) *lokal* eine Lipschitz-Bedingung (9) gilt.

77.6 Maximale Lösungen. a) Lösungen $\varphi_0 \in \mathcal{C}^1(I_0, \mathbb{K}^n)$ und $\varphi_1 \in \mathcal{C}^1(I_1, \mathbb{K}^n)$ von (1) gemäß Satz 77.5 stimmen wegen der Eindeutigkeitsaussage auf $I_0 \cap I_1$ überein. Durch „Vereinigung“ aller solcher Lösungen erhält man dann eine auf einem Intervall $I^* \subseteq I$ definierte *maximale Lösung* $\varphi^* \in \mathcal{C}^1(I^*, \mathbb{K}^n)$ von (1).

b) Hierbei muß i.a. *nicht* $I^* = I$ gelten. Dies zeigt etwa

$$\dot{x} = 1 + x^2\,, \quad x(0) = 0 \tag{13}$$

mit der auf $I^* = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ lebenden maximalen Lösung $\varphi^*(t) = \tan t$. Im Beispiel

$$\dot{x} \;=\; e^x \sin t\,, \quad x(0) = \xi \tag{14}$$

hängt das „Lebensintervall“ $I^*(\xi)$ der maximalen Lösung stark vom Anfangswert ab (vgl. 44.7). Im Gegensatz zu Bemerkung 77.4 b) kann sich also das *globale* Verhalten der Lösung bei kleiner Änderung des Anfangswertes *drastisch* ändern.

c) Allgemein *„laufen“* maximale Lösungen in Ω stets *„von Rand zu Rand“.*

Für *lineare Systeme* gilt stets $I^* = I$ gemäß Satz 46.1; dies kann man durch eine Modifikation des Beweises von Theorem 77.3 (vgl. [K2], Theorem 35.5) oder mittels *Neumannscher Reihe* einsehen, die im Wesentlichen der lineare Spezialfall des Banachschen Fixpunktsatzes ist. Beispiel (13) zeigt, daß die *Glattheit* der Daten $I^* = I$ *nicht* garantiert. Dies gilt jedoch unter einer geeigneten *Wachstumsbedingung* (15):

77.7 Satz. *Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f \in \mathcal{C}(I \times \mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$, sodass $\partial_{x_1} f, \ldots, \partial_{x_n} f$ stetig auf Ω existieren. Weiter gelte eine Abschätzung*

$$|\, f(t, x)\,| \;\le\; \alpha(t)\,|\,x\,| + \beta(t) \quad \text{für} \;\; (t, x) \in I \times \mathbb{K}^n \tag{15}$$

mit positiven stetigen Funktionen $\alpha, \beta \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. Dann gilt für jede maximale Lösung $\varphi^* : I^* \mapsto \mathbb{K}^n$ des Systems $\dot{x} = f(t, x)$ stets $I^* = I$.