78 Autonome Systeme und Erhaltungsgrößen

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Für ein Vektorfeld $v \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R}^n)$ untersuchen wir maximale Integralkurven, d. h. maximale Lösungen des *autonomen Systems*

$$\dot{x} \;=\; v(x)\,. \tag{1}$$

Interpretiert man v als *Geschwindigkeitsfeld* einer *stationären Strömung,* so beschreiben diese den Weg individueller Partikel in dieser Strömung.

Der folgende Begriff ist durch Erhaltungssätze der Physik motiviert:

78.1 Definition. *Es seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $v \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R}^n)$. Eine skalare Funktion $A \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R})$ heißt* erstes Integral *oder eine* Erhaltungsgröße *des Systems $\dot{x} = v(x)$, falls A längs jeder Lösung $\varphi \in \mathcal{C}^1(I_0, D)$ konstant ist, d. h. falls*

$$\tfrac{d}{dt}\,(A \circ \varphi) \;=\; 0 \quad \textit{gilt.} \tag{2}$$

78.2 Bemerkungen. a) Ist A ein erstes Integral des Systems $\dot{x} = v(x)$, so verlaufen Lösungen also stets in den *Niveaumengen*

$$N_c(A) = \{x \in D \mid A(x) = c\}\,, \quad c \in \mathbb{R}\,, \tag{3}$$

von A. Gilt $\xi \in N_c(A)$ und $\operatorname{grad} A(\xi) \neq 0$, so läßt sich aufgrund des *Satzes über implizite Funktionen* die Gleichung $A(x) - c = 0$ nahe ξ nach einer der Variablen auflösen; somit ist dann $N_c(A)$ nahe ξ eine $(n-1)$*-dimensionale Fläche,* speziell im Fall $n = 2$ eine *glatte Kurve.* Ist insbesondere c ein *regulärer Wert* von A, d. h. gilt $\operatorname{grad} A \neq 0$ auf $N_c(A)$, und ist $N_c(A)$ *kompakt,* so ist $N_c(A)$ eine endliche disjunkte Vereinigung glatter geschlossener Kurven. Für $A \in \mathcal{C}^n(D, \mathbb{R})$ sind *fast alle* Werte $c \in \mathbb{R}$ regulär *(Lemma von Sard).*

b) Zwecks Konstruktion erster Integrale beachtet man die *Kettenregel*

$$\tfrac{d}{dt}\,(A \circ \varphi) \;=\; \langle\, \operatorname{grad} A(\varphi(t))\,,\, \dot{\varphi}(t)\,\rangle \;=\; \langle\, \operatorname{grad} A(\varphi(t))\,,\, v(\varphi(t)))\,\rangle\,. \tag{4}$$

Ist also $A \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R})$ mit

$$\langle\, \operatorname{grad} A(x)\,,\, v(x)\,\rangle \;=\; 0 \quad \text{für alle } \; x \in D\,, \tag{5}$$

so ist A ein erstes Integral des Systems $\dot{x} = v(x)$.

c) Zu gegebenem $v \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R}^n)$ sucht man also zunächst ein Vektorfeld $w \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R}^n)$ mit möglichst wenig Nullstellen und

$$\langle\, w(x)\,,\, v(x)\,\rangle \;=\; 0 \quad \text{für alle } \; x \in D\,. \tag{6}$$

Dies ist leicht zu finden; für $n = 2$ und $v = (v_1, v_2)^\top$ kann man etwa $w = (-v_2, v_1)^\top$ nehmen. Dann sucht man ein *Potential* $A \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R})$ von w (vgl. Abschnitt 60).

78.3 Eulerscher Multiplikator. a) Wir betrachten nun den Fall $n = 2$. Dann ist ein Vektorfeld $w = (a, b)^\top \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R}^n)$ genau dann *wirbelfrei,* wenn

$$\delta := \tfrac{\partial a}{\partial y} - \tfrac{\partial b}{\partial x} \;=\; 0 \tag{7}$$

gilt. Nun erfüllt mit w auch jedes skalare Vielfache die Bedingung (6). Ist also $\delta \neq 0$, so sucht man eine skalare Funktion h mit möglichst wenig Nullstellen, so daß das Vektorfeld $h\cdot w$ wirbelfrei ist. Eine solche Funktion h heißt dann *Eulerscher Multiplikator* oder *integrierender Faktor* für w bzw. für das autonome System (1).

b) Es ist $h \cdot w$ genau dann wirbelfrei, wenn

$$\tfrac{\partial(hb)}{\partial x} - \tfrac{\partial(ha)}{\partial y} \;=\; b\,\tfrac{\partial h}{\partial x} - a\,\tfrac{\partial h}{\partial y} + h\,\tfrac{\partial b}{\partial x} - h\,\tfrac{\partial a}{\partial y} \;=\; 0$$

gilt, und dies ist äquivalent zu der *partiellen* Differentialgleichung

$$b\,\frac{\partial h}{\partial x} - a\,\frac{\partial h}{\partial y} \;=\; h\,\delta\,. \tag{8}$$

c) Die Lösung von (8) ist i. a. schwierig. Ist aber etwa $G = I \times J$ ein Rechteck, $b(x,y) \neq 0$ auf G und $B := \frac{\delta}{b}$ *nur von x abhängig,* so hat (8) eine ebenfalls nur von x abhängige Lösung h, die der *gewöhnlichen* Differentialgleichung

$$\tfrac{dh}{dx} \;=\; h(x)\,B(x) \tag{9}$$

genügt, also durch $h(x) = c\,\exp(\int B(x)\,dx)$ gegeben ist.

d) Entsprechendes gilt bei Vertauschung der Rollen von x und y. Es folgt nun ein weiterer Fall, in dem eine Lösung von (8) angebbar ist:

78.4 Räuber-Beute-Modell. a) Es wird ein *gekoppelter Wachstumsprozeß* für *zwei* Populationen modelliert (*Räuber-Beute-Modell* von Lotka-Volterra): Die konstante Wachstumsrate $\alpha > 0$ einer Beute-Population x wird durch einen zur Anzahl der Räuber proportionalen Term $-\rho y$ vermindert, die konstante negative Wachstumsrate $-\mu$ der Räuber-Population y entsprechend durch einen zur Anzahl der Beutetiere proportionalen Term βx erhöht. Man erhält dann das System

$$\dot{x} \;=\; (\alpha - \rho y)\,x\,, \quad \dot{y} \;=\; (\beta x - \mu)\,y\,, \quad (\alpha, \rho, \beta, \mu > 0)\,. \tag{10}$$

b) Über dem positiven Quadranten $(0,\infty)^2$ hat man

$$v(x,y) \;=\; ((\alpha - \rho y)\,x\,,\,(\beta x - \mu)\,y)^\top \tag{11}$$

und wählt dann

$$w(x,y) \;=\; ((\mu - \beta x)\,y\,,\,(\alpha - \rho y)\,x)^\top\,. \tag{12}$$

Für die in (8) auftretende Funktion δ hat man

$$\delta \;=\; \tfrac{\partial a}{\partial y} - \tfrac{\partial b}{\partial x} \;=\; (\mu - \beta x) - (\alpha - \rho y)\,,$$

und weiter gilt $x\,a(x,y) - yb(x,y) = (\mu - \beta x)\,xy - (\alpha - \rho y)\,xy = xy\,\delta(x,y)$. Für einen *nur von xy abhängigen* Eulerschen Multiplikator $h = h(xy)$ gilt nach (8)

$$b\,\tfrac{\partial h}{\partial x} - a\,\tfrac{\partial h}{\partial y} \;=\; byh' - axh' \;=\; (yb - xa)\,h' \;=\; -xy\delta h' \;=\; h\,\delta\,,$$

also $h'(s) = -\frac{1}{s}\,h(s)$ und $h(s) = \frac{1}{s}$. Folglich ist $h(x,y) = \frac{1}{xy}$ ein Eulerscher Multiplikator für w, und ein Potential von

$$\tfrac{1}{xy}\,w(x,y) \;=\; (\tfrac{\mu - \beta x}{x}\,,\,\tfrac{\alpha - \rho y}{y})^\top$$

ist gegeben durch

$$A(x,y) \ = \ \mu \log x - \beta x + \alpha \log y - \rho y \,. \tag{13}$$

c) Der einzige kritische Punkt von A ist offenbar $(x_0, y_0) = (\frac{\mu}{\beta}, \frac{\alpha}{\rho})$, und wegen $A \to -\infty$ für $x \to 0^+, \infty$ und $y \to 0^+, \infty$ muß A in (x_0, y_0) sein Maximum auf $\mathbb{R}^2_+$ annehmen. Jede Zahl $c < c_0 := A(x_0, y_0)$ ist dann *regulärer Wert* von A, und die entsprechende Niveaumenge $N_c(A) = \{(x,y) \in G \mid A(x,y) = c\}$ ist *kompakt.* In der Tat besteht $N_c(A)$ aus *einer* glatten geschlossenen Kurve.

d) Lösungen des Systems (10) müssen also in einer Niveaulinie von A verlaufen. In der Tat gibt es zu jeder Niveaulinie N_c mit $c < c_0$ eine für alle Zeiten existierende Lösung, die N_c periodisch durchläuft. Allgemeiner gilt:

78.5 Satz. *Es seien $v \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{K}^n)$ ein Vektorfeld und $\Gamma \subseteq D$ eine glatte geschlossene Kurve mit $v(x) \neq 0$ auf Γ. Für eine maximale Integralkurve $\varphi : I \mapsto D$ von v mit $\varphi(I) \subseteq \Gamma$ gilt dann $I = \mathbb{R}$, $\varphi(I) = \Gamma$, und φ ist* periodisch.