79 Diffusionsprozesse

79.1 Die Diffusionsgleichung. Diffusionsprozesse wie etwa Wärmeleitung über einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^n$ (insbesondere für $n = 1, 2, 3$) werden mit einem $\alpha > 0$ durch die partielle Differentialgleichung

$$\partial_t u(x,t) - \alpha\, \Delta_x u(x,t) \;=\; 0 \tag{1}$$

für $x \in G$ und $\tau_0 < t < \tau_1$ beschrieben, wobei der Laplace-Operator nur auf die Ortsvariablen angewendet wird.

Wir untersuchen zunächst Diffusionsprozesse auf $\mathbb{R}^n$.

79.2 Lösung der Diffusionsgleichung auf $\mathbb{R}^n$. Die Fourier-Transformation der Wärmeleitungsgleichung (1) bezüglich der Raum-Variablen liefert die *gewöhnlichen Differentialgleichungen*

$$\partial_t \widehat{u}(\xi,t) + \alpha\, |\,\xi\,|^2\, \widehat{u}(\xi,t) \;=\; 0 \tag{2}$$

für alle Parameter $\xi \in \mathbb{R}^n$. Mit einer *Anfangsbedingung*

$$u(x,0) \;=\; A(x) \;\Leftrightarrow\; \widehat{u}(\xi,0) \;=\; \widehat{A}(\xi) \tag{3}$$

hat (2) die Lösung

$$\widehat{u}(\xi,t) \;=\; \widehat{A}(\xi)\, e^{-\alpha t |\,\xi\,|^2} \;=\; (2\pi)^{\frac{n}{2}}\, \widehat{A}(\xi)\, \widehat{G^{2\alpha t}}(\xi)\,, \tag{4}$$

und wegen (75.18) erhält man als Lösung von (1) und (3)

$$u(x,t) \;=\; (G^{2\alpha t} * A)(x) \;=\; (4\pi\alpha t)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\!\left(-\tfrac{|\,x-y\,|^2}{4\alpha t}\right) A(y)\, d^n y\,. \tag{5}$$

Wir diskutieren diese Formel nun genauer. Die Temperaturverteilungen $G^t \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ „fließen für $t \to \infty$ auseinander" und „konzentrieren sich für $t \to 0^+$ immer stärker um den Nullpunkt". Die Gauß-Kerne bilden eine *Dirac-Familie* für $t \to 0$:

79.3 Definition. *a) Eine Folge (δ_k) in $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$ heißt* Dirac-Folge *oder eine* approximative Eins *von $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$, wenn sie die folgenden Eigenschaften hat:*

$$\delta_k \ge 0\,, \quad \int_{\mathbb{R}^n} \delta_k(x)\, dx = 1\,, \quad \lim_{k\to\infty} \int_{|\,x\,|\ge\xi} \delta_k(x)\, dx = 0 \quad \text{für alle } \xi > 0\,. \tag{6}$$

b) Eine Abbildung $\delta : (0,b) \mapsto \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$ heißt Dirac-Familie *oder* approximative Eins *von $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$ (für $t \to 0^+$), falls (δ_{t_k}) für jede Folge $t_k \to 0^+$ eine Dirac-Folge ist.*

Analog zum Satz von Fejér gilt dann:

79.4 Satz. *Es sei (δ_k) eine Dirac-Folge in $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$.*

a) Für $p = 1, 2$ und $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n)$ hat man $\|\,\delta_k * f - f\,\|_{L_p} \to 0$ für $k \to \infty$.

b) Für stetige beschränkte Funktionen f gilt $\delta_k * f \to f$ lokal gleichmäßig.

79.5 Gauß-Kerne und Wärmeleitung. a) Ab jetzt sei jetzt $\alpha = \frac{1}{2}$. Die Lösung $u = G^t * A$ der Wärmeleitungsgleichung aus (5) ist $\mathcal{C}^\infty$ auf $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$. Für $p = 1,2$ und $A \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n)$ gilt $\| u(\cdot,t) - u(\cdot,0) \|_{L_p} \to 0$ für $t \to 0^+$ nach Satz 79.4 a); für *stetige und beschränkte* Funktionen $A \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n)$ ist u *stetig* auf $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ gemäß Satz 79.4 b). Gilt sogar $A \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, so daß alle Ableitungen von A auf $\mathbb{R}^n$ beschränkt sind, so hat man

$$\partial^\alpha (G^t * A) \;=\; G^t * \partial^\alpha A \;\to\; \partial^\alpha A \quad \text{für} \quad t \to 0^+ \tag{7}$$

lokal gleichmäßig für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und somit $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$.

b) Für $A \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ist wegen $|(G^t * A)(x)| \le \| G^t \|_{\sup} \| A \|_{L_1}$ die Funktion $G^t * A$ für festes $t > 0$ eine *beschränkte* $\mathcal{C}^\infty$-Funktion in $L_1(\mathbb{R}^n)$. Nach (75.18) und (75.11) ist das Integral

$$\textstyle\int_{\mathbb{R}^n} (G^t * A)(x) đ^n x \;=\; (\widehat{G^t * A})(0) \;=\; (2\pi)^{\frac{n}{2}}\, \widehat{G^t}(0) \cdot \widehat{A}(0) \;=\; \widehat{A}(0) \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} A(x) đ^n x$$

zeitlich konstant, während die Amplituden $(\widehat{G^t * A})(\xi) = \widehat{A}(\xi)\, e^{-\frac{t|\xi|^2}{2}}$ aller Frequenzen $\xi \ne 0$ für $t \to \infty$ exponentiell abfallen.

c) Nach (75.19) gilt

$$G^t * G^\tau \;=\; G^{t+\tau} \quad \text{für} \quad t,\tau > 0\,.$$

Aus Abschätzungen $c \le G^\tau * A \le C$ zur Zeit $\tau \ge 0$ folgt daher auch

$$c \;\le\; G^t * A \;=\; G^{t-\tau} * G^\tau * A \;\le\; C$$

für alle Zeiten $t \ge \tau$; insbesondere bleibt die *Positivität* der Temperaturverteilung stets erhalten.

d) Die Anfangsbedingung $u(x,0) = G(x,\tau)$ liefert die Lösung $u(x,t) = G(x,t+\tau)$. Mit $\tau \to 0$ „erhält man“ für die Anfangsbedingung $u(x,0) = \delta(x)$ die Lösung $u(x,t) = G(x,t)$.

e) Mit Hilfe eines *Maximumprinzips* kann man zeigen, daß u die *einzige beschränkte* Lösung des *Cauchy-Problems* (1), (3) ist (nur solche sind physikalisch sinnvoll). *Eindeutigkeitsaussagen* gelten auch unter allgemeineren *Wachstumsbedingungen.*

f) Durch

$$g : t \mapsto \begin{cases} \exp(-1/t^2) & , \quad t > 0 \\ 0 & , \quad t \le 0 \end{cases} \tag{8}$$

wird eine $\mathcal{C}^\infty$-Funktion auf $\mathbb{R}$ definiert mit $g^{(k)}(0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Die Funktion

$$u(x,t) := \sum_{k=0}^{\infty} g^{(k)}(t)\, \frac{x^{2k}}{(2k)!} \tag{9}$$

ist dann $\mathcal{C}^\infty$ auf $\mathbb{R}^2$ mit $u(x,0) = 0$. Weiter gilt

$$\partial_x^2 u(x,t) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} g^{(k)}(t)\, \frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!} \;=\; \sum_{j=0}^{\infty} g^{(j+1)}(t)\, \frac{x^{2j}}{(2j)!} \;=\; \partial_t u(x,t)\,.$$

Somit ist die Lösung des Cauchy-Problems (1), (3) nicht immer eindeutig.

g) Für $t < 0$ divergiert das Integral in (5), und Lösungen des „rückwärtigen" Cauchy-Problems (1), (3) sind schwer zu finden. In der Tat ist Diffusion ein *irreversibler* Vorgang.

h) Nun sei $u(\cdot, 0) = A \geq 0$ eine zur in $\overline{K}_\varepsilon(0)$ konzentrierte Temperaturverteilung. Nach (5) gilt aber i. a. $u(x,t) > 0$ für $t > 0$ und alle $x \in \mathbb{R}^n$. Die Anfangstemperatur breitet sich also „in beliebig kurzer Zeit auf ganz $\mathbb{R}^n$ aus". Dies widerspricht den Prinzipien der *Relativitätstheorie;* die Wärmeleitungsgleichung (1) beschreibt also „die physikalische Realität" nur *näherungsweise.*

79.6 Diffusion in einem langen dünnen Stab. a) Gegeben sei die Diffusionsgleichung

$$\partial_t u(x,t) - \alpha\, \partial_x^2 u(x,t) \;=\; 0 \tag{10}$$

über dem Intervall $G := (0, \infty)$ mit einer Anfangsbedingung

$$u(x,0) \;=\; A(x)\,, \quad x \geq 0\,, \tag{11}$$

und einer Randbedingung

$$u(0,t) \;=\; T(t)\,, \quad t \geq 0\,. \tag{12}$$

b) Als Lösungsansatz verwendet man (5), wobei $A(y)$ für $y < 0$ so gewählt werden soll, daß (12) erfüllt ist. Mit

$$u(x,t) \;=\; (4\pi\alpha t)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\tfrac{(x-y)^2}{4\alpha t})\, A(y)\, dy\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,\, t > 0 \tag{13}$$

lautet (12) so:

$$\sqrt{4\pi\alpha t}\, T(t) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\tfrac{y^2}{4\alpha t})\, A(y)\, dy \;=\; \int_0^{\infty} \exp(-\tfrac{y^2}{4\alpha t})\, (A(y) + A(-y))\, dy\,.$$

Im Fall $T(t) = 0$ setzt man einfach $A(-y) := -A(y)$ für $y > 0$.

c) Im allgemeinen Fall erhält man aus

$$\int_0^{\infty} \exp(-\tfrac{y^2}{4\alpha t})\, A(-y)\, dy \;=\; \sqrt{4\pi\alpha t}\, T(t) - \int_0^{\infty} \exp(-\tfrac{y^2}{4\alpha t})\, A(y)\, dy \;=: H(t)$$

durch die Substitutionen $\tau := \frac{1}{4\alpha t}$, $\sigma := y^2$ die Gleichung

$$\int_0^{\infty} \tfrac{A(-\sqrt{\sigma})}{2\sqrt{\sigma}}\, e^{-\sigma\tau}\, d\sigma \;=\; H(\tfrac{1}{4\alpha\tau})\,, \quad \tau > 0\,, \tag{14}$$

und löst diese mittels inverser Laplace-Transformation.

d) Der allgemeine Fall ergibt sich auch durch Überlagerung der Spezialfälle $T(t) = 0$ für $t \geq 0$ und $A(x) = 0$ für $x \geq 0$. In letzteren Fall ist einfach $H(t) = \sqrt{4\pi\alpha t}\, T(t)$, und nach längerer Rechnung erhält man

$$u(x,t) \;=\; \tfrac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}}^{\infty} T(t - \tfrac{x^2}{4\alpha y^2})\, e^{-y^2}\, dy\,. \tag{15}$$

e) Speziell für eine konstante Temperatur $T(t) = T$ erhält man

$$u(x,t) \;=\; \tfrac{2T}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}}^{\infty} e^{-y^2}\, dy \;=\; T\,(1 - \tfrac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}} e^{-y^2}\, dy) \tag{16}$$

wegen $\int_0^{\infty} e^{-y^2}\, dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.