80 Schwingende Saiten

80.1 Problem. Es werden die *Schwingungen einer (Geigen-) Saite* der Länge $\ell > 0$ und Massendichte $\rho(x) > 0$, $0 \le x \le \ell$, untersucht. Ist diese in den Punkten $x = 0$ und $x = \ell$ fest eingespannt, so erfüllt ihre Auslenkung $u(x,t)$ an der Stelle $x \in [0,\ell]$ zur Zeit $t \in \mathbb{R}$ die *Wellengleichung*

$$\partial_t^2 u(x,t) \;=\; \tfrac{1}{\rho(x)}\,\partial_x^2 u(x,t) \tag{1}$$

und die *Randbedingung*

$$u(0,t) \;=\; u(\ell,t) \;=\; 0\,. \tag{2}$$

Aus der Kenntnis von *Lage* und *Geschwindigkeit*

$$u(x,0) \;=\; A(x)\,, \quad \partial_t u(x,0) \;=\; B(x) \tag{3}$$

zur Zeit $t = 0$ soll nun die Lösung $u(x,t)$ für alle Zeiten t bestimmt werden, d. h. es soll das *Anfangs-Randwertproblem* (1)–(3) gelöst werden. Wegen (2) und (3) muß natürlich $A(0) = A(\ell) = 0$ vorausgesetzt werden.

80.2 Eigenwerte und Eigenfunktionen. a) Für eine Lösung von (1) macht man den *den Produktansatz*

$$u(x,t) \;=\; f(x)\,g(t) \tag{4}$$

mit nur von der Orts- bzw. Zeitvariablen abhängigen, genügend oft differenzierbaren Funktionen f und g. Aus (1) folgt dann

$$f(x)\,\ddot g(t) \;=\; \tfrac{1}{\rho(x)}\,f''(x)\,g(t)\,, \quad x,t \in \mathbb{R}\,.$$

b) Für eine Lösung $u \neq 0$ von (1) der Form (4) gibt es $t_0 \in \mathbb{R}$ mit $g(t_0) \neq 0$. Mit $\lambda := -\frac{\ddot g(t_0)}{g(t_0)}$ erfüllt dann f die *gewöhnliche Differentialgleichung*

$$f''(x) + \lambda\,\rho(x)\,f(x) \;=\; 0\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \tag{5}$$

und daraus ergibt sich für g die Differentialgleichung

$$\ddot g(t) + \lambda\,g(t) \;=\; 0\,, \quad t \in \mathbb{R}\,. \tag{6}$$

c) Ab jetzt (in diesem Abschnitt) sei die Massendichte $\rho > 0$ *konstant.* Die Lösungen von (5) sind $f(x) = c_1 + c_2 x$ für $\lambda = 0$ und $f(x) = c_1 \sin\sqrt{\rho\lambda}x + c_2\cos\sqrt{\rho\lambda}x$ für $\lambda \neq 0$. Nun impliziert die Randbedingung (2) sofort $f(0) = f(\ell) = 0$, also $f = 0$ im Fall $\lambda = 0$ und $c_2 = 0$ sowie $\sqrt{\rho\lambda}\,\ell \in \pi\mathbb{Z}$ für $\lambda \neq 0$. Das *Randwertproblem*

$$f''(x) + \rho\lambda\,f(x) \;=\; 0\,, \quad f(0) \;=\; f(\ell) \;=\; 0\,, \tag{7}$$

besitzt also *nicht triviale Lösungen* nur im Fall

$$\lambda \;=\; \lambda_k \;=\; \tfrac{\pi^2}{\rho\ell^2}\,k^2 \quad \text{für ein} \quad k \in \mathbb{N}\,; \tag{8}$$

diese Zahlen λ_k heißen die **Eigenwerte** des Randwertproblems (7), und die entsprechenden **Eigenfunktionen** sind gegeben durch

$$\varphi_k(x) := c_k \sin \tfrac{\pi}{\ell} k\, x\,, \quad k \in \mathbb{N}\,, \quad c_k \in \mathbb{C}\,. \tag{9}$$

d) Mit $c := \frac{1}{\sqrt{\rho}}$ sind für $\lambda = \lambda_k$ die Lösungen von (6) gegeben durch

$$g_k(t) = a_k \cos c\, \tfrac{\pi}{\ell}\, k\, t + b_k \sin c\, \tfrac{\pi}{\ell}\, k\, t\,, \tag{10}$$

die entsprechenden Lösungen von (1), (2) dann durch

$$u_k(x,t) = (a_k \cos c\, \tfrac{\pi}{\ell}\, k\, t + b_k \sin c\, \tfrac{\pi}{\ell}\, k\, t) \sin \tfrac{\pi}{\ell}\, k\, x\,, \quad k \in \mathbb{N}\,. \tag{11}$$

Die *Eigenfunktionen* φ_k *schwingen* also mit den *Frequenzen* $c\, \frac{\pi}{\ell}\, k$, $k \in \mathbb{N}$. Alle vorkommenden Frequenzen sind offenbar ganzzahlige Vielfache der *Grundfrequenz* $c\, \frac{\pi}{\ell}$.

80.3 Reihenentwicklungen. a) Der Einfachheit wegen wird ab jetzt $\ell = \pi$ für die Länge der Saite angenommen. Man möchte weitere Lösungen von (1)–(3) durch *Überlagerungen* der u_k konstruieren:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos ckt + b_k \sin ckt) \sin kx\,. \tag{12}$$

Man hat absolute und gleichmäßige Konvergenz dieser Reihe und der Reihen der Ableitungen der Ordnung ≤ 2 auf ganz $\mathbb{R}^2$ im Fall

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 (|\, a_k \,| + |\, b_k \,|) < \infty\,. \tag{13}$$

Dann ist $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ eine Lösung von (1) und (2), und man hat

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx\,, \quad \partial_t u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} c\, k\, b_k \sin kx\,. \tag{14}$$

b) Funktionen $F : [0,\pi] \mapsto \mathbb{R}$ mit $F(0) = F(\pi) = 0$ besitzen *ungerade* Fortsetzungen auf $[-\pi,\pi]$ und diese dann 2π *-periodische Fortsetzungen* auf $\mathbb{R}$, die hier mit $\breve{F}$ bezeichnet werden. In der *reellen* Fourier-Entwicklung von $\breve{F}$ verschwinden die geraden Terme, und man hat (vgl. (71.9))

$$\breve{F}(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} F_k \sin kx \quad \text{mit} \quad F_k := \tfrac{2}{\pi} \textstyle\int_0^{\pi} F(x) \sin kx\, dx\,. \tag{15}$$

c) Wählt man also in (12) $a_k = A_k$ und $b_k = \frac{B_k}{ck}$ mit den Fourier-Koeffizienten von A und B gemäß (15), so erhält man eine Lösung des Anfangs-Randwertproblems (1)–(3), falls die Bedingung (13) erfüllt ist.

In der Tat genügen sogar etwas schwächere Annahmen über die Anfangsdaten A und B für die

80.4 Lösung des Problems (1)–(3). a) Es sei $B = 0$ und

$$A \in \mathcal{C}^2[0,\pi] \quad \text{mit} \quad A(0) = A(\pi) = 0 \quad \text{und} \quad A''(0) = A''(\pi) = 0\,. \tag{16}$$

Dann folgt $\breve{A} \in \mathcal{C}^2_{2\pi}(\mathbb{R})$. Wegen

$$\cos ckt \, \sin kx \;=\; \tfrac{1}{2} \sin k\,(x+ct) + \tfrac{1}{2} \sin k\,(x-ct)$$

liefert die Reihe gemäß (12) die Funktion

$$\begin{aligned} u_A(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \, \cos ckt \, \sin kx \\ &= \tfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} A_k \, \sin k\,(x+ct) + \tfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} A_k \, \sin k\,(x-ct) \\ &= \tfrac{1}{2} \breve{A}(x+ct) + \tfrac{1}{2} \breve{A}(x-ct)\,. \end{aligned} \tag{17}$$

Wegen $\breve{A} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ gilt $u_A \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, und man rechnet sofort nach, daß u_A eine Lösung der Wellengleichung (1) ist. Offenbar sind auch (2) und (3) (mit $B = 0$) erfüllt. Man erhält also u_A, indem man jeweils die „Hälfte der Welle" $\breve{A}$ mit der Geschwindigkeit c „nach links und nach rechts laufen" läßt und dann überlagert.

b) Nun wird der Fall $A = 0$ behandelt. Ist

$$B \in \mathcal{C}^1[0,\pi] \quad \text{mit} \quad B(0) = B(\pi) = 0\,, \tag{18}$$

so folgt $\breve{B} \in \mathcal{C}^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ und insbesondere $\sum_{k=1}^{\infty} |\, B_k \,| < \infty$. Die Funktion

$$u_B(x,t) \;:=\; \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{B_k}{ck} \, \sin ckt \, \sin kx \tag{19}$$

liegt dann in $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ und erfüllt (2) und (3) (mit $A = 0$). Ähnlich wie in (17) ist

$$\begin{aligned} \partial_t u_B(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} B_k \, \cos ckt \, \sin kx \\ &= \tfrac{1}{2} \breve{B}(x+ct) + \tfrac{1}{2} \breve{B}(x-ct) \quad \text{und} \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} \partial_x u_B(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{B_k}{c} \, \sin ckt \, \cos kx \\ &= \tfrac{1}{2c} \breve{B}(x+ct) - \tfrac{1}{2c} \breve{B}(x-ct)\,, \quad \text{also} \end{aligned} \tag{21}$$

$$u_B(x,t) \;=\; \tfrac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \breve{B}(y)\, dy\,; \tag{22}$$

somit gilt sogar $u_B \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, und man rechnet wieder nach, daß u_B eine Lösung der Wellengleichung (1) ist.

c) Für Anfangsdaten A und B wie in (16) und (18) liefert $u_A + u_B$ offenbar eine Lösung des allgemeinen Problems (1)–(3).

Auch schwingende Saiten „unendlicher Länge" lassen sich leicht behandeln:

80.5 Satz. *Jede Lösung $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ der Wellengleichung*

$$\partial_t^2 u(x,t) \;=\; c^2 \, \partial_x^2 u(x,t) \tag{23}$$

hat die Form

$$u(x,t) \;=\; f(x+ct) + g(x-ct)\,, \quad f,g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})\,. \tag{24}$$

80.6 Satz. *Für* $A \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ *und* $B \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ *besitzt das* Anfangs- *oder* Cauchy-Problem *(23), (3) die* eindeutige Lösung

$$u(x,t) \;=\; \tfrac{1}{2}\,A(x+ct) + \tfrac{1}{2}\,A(x-ct) + \tfrac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} B(y)\,dy\,. \tag{25}$$

80.7 Beispiel. Für $A(x) = A\,\cos x$ und $B(x) = B\,\cos x$ hat man

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \tfrac{1}{2}\,A\,\cos(x+ct) + \tfrac{1}{2}\,A\,\cos(x-ct) + \tfrac{B}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\cos y\,dy \\ &= A\,\cos x\,\cos ct + \tfrac{B}{c}\,\cos x\,\sin ct \\ &= \sqrt{A^2 + \tfrac{B^2}{c^2}}\,\cos x\,\cos(ct+\varphi)\,, \quad \varphi = \arctan(-\tfrac{B}{Ac})\,; \end{aligned}$$

dies beschreibt eine *stehende Welle.*

80.8 Charakteristiken. a) Eine durch $f(x \pm ct)$ gegebene Welle ist konstant auf jeder durch $x \pm ct = K$, K konstant, gegebenen Geraden. Diese Geraden der Steigung $\mp\frac{1}{c}$ in der (x,t)-Ebene heißen *Charakteristiken* der Wellengleichung (23).

b) Für einen Punkt $P = (\xi,\tau) \in \mathbb{R}^2$ mit $\tau > 0$ sei D das Dreieck mit den Eckpunkten $P = (\xi,\tau)$, $P_1 := (\xi - c\tau, 0)$ und $P_2 := (\xi + c\tau, 0)$. Dann ist eine Lösung u der Wellengleichung in D *eindeutig bestimmt*

- durch ihre Anfangswerte $u(x,0)$ und $\partial_t u(x,0)$ im Intervall $[\xi - c\tau, \xi + c\tau] \times \{0\}$ *oder*
- ihre Werte $u(\xi \pm ct, \tau - t)$ auf den *Schenkeln* von D.

80.9 Bemerkungen. a) Im Gegensatz zum Fall der Wärmeleitungsgleichung liefern die Formeln (17), (22) und (25) Lösungen auch für $t < 0$; in der Tat ist die Wellengleichung gegen die *Zeitumkehr* $t \mapsto -t$ *invariant.*

b) Während die (periodischen) Lösungen der Wärmeleitungsgleichung für beliebige Anfangsdaten in L_1 für $t > 0$ automatisch $\mathcal{C}^\infty$ sind, ist die Wellengleichung nur für genügend *glatte* Anfangsdaten (klassisch) lösbar. Einfache Beispiele zeigen, daß die Formeln (24) oder (25) auch für *unstetige* Anfangsdaten „sinnvolle Lösungen" der Wellengleichung liefern können. Dies ist ein Anlaß zu einer *Erweiterung* des *Lösungsbegriffs für Differentialgleichungen* im Rahmen der Theorie der *Distributionen* (vgl. HM 4).

80.10 Energiemethoden. a) Für Anfangs-Randwertprobleme für die Wellengleichung hat man *Eindeutigkeit* und *Stabilität* der Lösungen, auch im Fall *mehrerer Ortsvariabler.* Gegeben seien ein Gebiet mit fast überall glattem Rand endlichen „Inhalts" in $\mathbb{R}^n$, z. B. $n = 1,2,3$, sowie die Differentialgleichung

$$(\partial_t^2 - c^2\,\Delta_x)\,u(x,t) \;=\; F(x,t)\,, \quad x \in G\,, \quad t \in \mathbb{R} \tag{26}$$

mit den Rand- und Anfangsbedingungen

$$u(x,t) \;=\; R(t)\,, \quad x \in \partial G\,, \tag{27}$$

$$u(x,0) \;=\; A(x)\,, \quad \partial_t u(x,0) \;=\; B(x)\,, \quad x \in G\,. \tag{28}$$

Sind $u_1, u_2 \in \overline{\mathcal{C}}^2(G \times \mathbb{R})$ Lösungen von (26)–(28), so ist $u := u_1 - u_2$ eine Lösung zu den Anfangsdaten $F = R = A = B = 0$, und es ist $u = 0$ zu zeigen.

b) Aufgrund der Greenschen Formel Formel (63.10) und $\partial_t u(x,t) = 0$ für $x \in \partial G$ gilt

$$\begin{aligned} c^2 \tfrac{d}{dt} \textstyle\int_G |\operatorname{grad}_x u|^2\,dx &= 2c^2 \textstyle\int_G \langle \operatorname{grad}_x u, \operatorname{grad}_x \partial_t u \rangle\,dx \\ &= 2c^2 \textstyle\int_{\partial G} \partial_t u\, \partial_{\mathfrak{n}} u\, d\sigma - 2c^2 \textstyle\int_G \partial_t u\, \Delta_x u\, dx \\ &= -2 \textstyle\int_G \partial_t u\, \partial_t^2 u\, dx = -\tfrac{d}{dt} \textstyle\int_G (\partial_t u)^2\, dx\,. \end{aligned}$$

Folglich ist die *Energie*

$$E(t) := \textstyle\int_G (\partial_t u(x,t)^2 + c^2\,|\operatorname{grad}_x u(x,t)|^2)\,dx \qquad (29)$$

zeitlich konstant. Wegen $E(0) = 0$ ist also $E(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und somit $\partial_t u(x,t) = \operatorname{grad}_x u(x,t) = 0$ für alle $x \in G$ und $t \in \mathbb{R}$. Somit ist u konstant, und die Rand- und Anfangsbedingungen liefern $u = 0$.