81 Harmonische Funktionen und Dirichlet-Probleme

81.1 Definition. *Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine Funktion $u \in \mathcal{C}^2(D,\mathbb{K})$ heißt* harmonisch, *wenn $\Delta u = 0$ gilt. Mit $\mathcal{H}(D,\mathbb{K})$ wird der Raum aller $\mathbb{K}$-wertigen harmonischen Funktionen auf D bezeichnet.*

Im Fall $n = 2$ ist eine reelle harmonische Funktion nach Satz 64.7 lokal Realteil einer holomorphen Funktion und daher automatisch $\mathcal{C}^\infty$ und reell-analytisch. Aus der folgenden Integralformel (4) ergibt sich diese Aussage auch für den Fall $n \geq 3$.

81.2 Newton-Potentiale. a) Es sei $\tau_n = \sigma(S^{n-1})$ das Maß der Einheitssphäre des $\mathbb{R}^n$, also etwa $\tau_2 = 2\pi$ und $\tau_3 = 4\pi$. Aufgrund der Volumenformel 63.5 bzw. des Gaußschen Integralsatzes hat man $\tau_n = n\,\omega_n$, wobei $\omega_n = \lambda^n(K_1(0))$ das Volumen der Einheitskugel des $\mathbb{R}^n$ ist (vgl. (57.20) oder (59.6)).

b) Die auf $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ harmonische und dort reell-analytische Funktion

$$E(x) := \begin{cases} -\frac{1}{(n-2)\,\tau_n}\,\frac{1}{|\,x\,|^{n-2}} & , \quad n \geq 3 \\ \frac{1}{2\pi}\,\log|\,x\,| & , \quad n = 2 \end{cases} \tag{1}$$

wird als *Fundamentallösung* des Laplace-Operators Δ bezeichnet (vgl. dazu HM 4); diese besitzt eine *Singularität* im Nullpunkt. Nach 51.6 c) sind *alle rotationssymmetrischen* harmonischen Funktionen auf $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ gegeben durch $c_1\,E + c_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

c) Offenbar gilt für $n \geq 2$

$$\operatorname{grad} E(x) \;=\; \tfrac{1}{\tau_n}\,\tfrac{x}{|\,x\,|^n}\,, \quad x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}\,. \tag{2}$$

d) Für $x \in \mathbb{R}^n$ heißt die Funktion

$$E_x : y \mapsto E(y-x) \tag{3}$$

das *Newton-Potential* mit Singularität $x \in \mathbb{R}^n$.

81.3 Satz. *Es sei $\Omega \in \mathfrak{G}_s(\mathbb{R}^n)$ ein Gebiet mit fast überall glattem Rand und endlichem Randinhalt $\sigma(\partial\Omega) < \infty$. Für eine in Ω harmonische Funktion $u \in \overline{\mathcal{C}}^1(\Omega,\mathbb{R})$ gilt dann*

$$\int_{\partial\Omega} (u\,\partial_{\mathfrak{n}} E_x - E_x\,\partial_{\mathfrak{n}} u)(y)\,d\sigma(y) \;=\; \begin{cases} u(x) & , \quad x \in \Omega \\ 0 & , \quad x \notin \overline{\Omega} \end{cases}\,. \tag{4}$$

Beweis. a) Für $x \notin \overline{\Omega}$ ist E_x auf einer Umgebung von $\overline{\Omega}$ harmonisch, und die Greensche Integralformel (63.11) liefert

$$\textstyle\int_{\partial\Omega} (u\,\partial_{\mathfrak{n}} E_x - E_x\,\partial_{\mathfrak{n}} u)\,d\sigma \;=\; \int_\Omega (u\,\Delta E_x - E_x\,\Delta u)\,d^n y \;=\; 0\,. \tag{5}$$

b) Für $x \in \Omega$ wählt man ein $\delta > 0$ mit $\overline{K}_\delta(x) \subseteq \Omega$ und wendet für $0 < r < \delta$ gemäß Beweisteil a) Formel (5) auf $x \notin \Omega_x := \Omega\backslash\overline{K}_r(x)$ an; dann folgt

$$\textstyle\int_{\partial\Omega} (u\,\partial_{\mathfrak{n}} E_x - E_x\,\partial_{\mathfrak{n}} u)\,d\sigma \;=\; \int_{\partial K_r(x)} (u\,\partial_{\mathfrak{n}} E_x - E_x\,\partial_{\mathfrak{n}} u)\,d\sigma\,. \tag{6}$$

Für $y \in \partial K_r(x)$ ist der äußere Normalenvektor gegeben durch $\mathfrak{n}(y) = \frac{y-x}{r}$, und aus (2) ergibt sich

$$\partial_{\mathfrak{n}} E_x(y) \;=\; \langle \operatorname{grad} E_x(y), \mathfrak{n}(y) \rangle \;=\; \tfrac{1}{\tau_n\, r^{n-1}}\,, \quad \text{also} \tag{7}$$

$$\lim_{r\to 0} \textstyle\int_{\partial K_r(x)} u\, \partial_{\mathfrak{n}} E_x \, d\sigma \;=\; \lim_{r\to 0} \tfrac{1}{\sigma(\partial K_r(x))} \textstyle\int_{\partial K_r(x)} u \, d\sigma \;=\; u(x) \tag{8}$$

aufgrund der Stetigkeit von u. Mit $C := \| \operatorname{grad} u \|_{\overline{K_\delta(x)}}$ gilt weiter

$$\begin{aligned} \Big| \int_{\partial K_r(x)} E_x\, \partial_{\mathfrak{n}} u \, d\sigma \Big| \;&\le\; \frac{C\,\sigma(\partial K_r(x))}{(n-2)\,\tau_n\, r^{n-2}} \;=\; \frac{C\,r}{n-2}\,, \quad n \ge 3\,, \\ &\le\; \frac{C\,\sigma(\partial K_r(x))\, \log r}{2\pi} \;=\; C\,r\, \log r\,, \quad n = 2\,, \end{aligned}$$

und somit $\int_{\partial K_r(x)} E_x\, \partial_{\mathfrak{n}} u\, d\sigma \to 0$ für $r \to 0^+$. Die Behauptung ergibt sich somit aus (6) und (8).

81.4 Folgerung. *Für offene Mengen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ besteht $\mathcal{H}(\Omega) \subseteq \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ aus reell-analytischen Funktionen.*

Beweis. Zu $a \in \Omega$ wählt man $r > 0$ mit $\overline{K}_{3r}(a) \subseteq \Omega$. Die Funktionen $E(x-y)$ und $\partial_{\mathfrak{n}}^y E(x-y)$ sind für $y \in \mathbb{R}^n \backslash \overline{K}_r(a)$ reell-analytisch in $x \in K_r(a)$, und nach (4) für $\Omega = K_{2r}(a)$ ist auch $u \in \mathcal{H}(\Omega)$ auf $K_r(a)$ reell-analytisch.

81.5 Satz. *Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine harmonische Funktion $u \in \mathcal{H}(\Omega)$ besitzt die folgende* Mittelwerteigenschaft: *Für $\overline{K}_r(x) \subseteq \Omega$ gilt*

$$u(x) \;=\; \frac{1}{\tau_n\, r^{n-1}} \int_{\partial K_r(x)} u(y)\, d\sigma(y) \;=\; \frac{1}{\tau_n} \int_{S^{n-1}} u(x + r\eta)\, d\sigma(\eta)\,. \tag{9}$$

Beweis. Auf $\partial K_r(x)$ sind E_x und $\partial_{\mathfrak{n}} E_x$ konstant. Daher folgt die erste Gleichung in (9) sofort aus (4), (7) und (10); die zweite ergibt sich mittels der Variablentransformation $y = x + r\eta$.

In Satz 81.16 wird auch die *Umkehrung* von Satz 81.5 gezeigt. Eine wichtige Konsequenz der Mittelwerteigenschaft ist:

81.6 Satz (Maximum-Prinzip). *Es seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $u \in \mathcal{H}(\Omega)$ eine harmonische Funktion. Gibt es $a \in \Omega$ mit*

$$u(a) \;=\; M := \; \max\{u(x) \mid x \in \Omega\}\,,$$

so ist u konstant.

81.7 Folgerung. *Es seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ in Ω harmonisch. Dann nimmt die Funktion u ihr Maximum und ihr Minimum auf dem Rand $\partial\Omega$ an.*

81.8 Randwertprobleme. a) Für $\Omega \in \mathfrak{G}_s(\mathbb{R}^n)$ mit $\sigma(\partial\Omega) < \infty$ ist eine in Ω harmonische Funktion $u \in \overline{\mathcal{C}}^1(\Omega, \mathbb{R})$ aufgrund der Integralformel (4) durch die Werte von u und von $\partial_{\mathfrak{n}} u$ auf dem Rand $\partial\Omega$ eindeutig festgelegt.

b) Aufgrund des *Maximumprinzips* genügen dafür bereits die Funktionswerte $u|_{\partial\Omega}$; andererseits ist u in Ω durch $\partial_{\mathfrak{n}} u|_{\partial\Omega}$ nicht eindeutig festgelegt, was bereits konstante Funktionen zeigen.

c) Umgekehrt sei nun $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$ gegeben. Gesucht ist dann eine Fortsetzung $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ von g, die in Ω harmonisch ist. Dieses *Dirichlet-Problem* läßt sich für jedes beschränkte Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ formulieren; es besitzt also stets *höchstens eine* Lösung auf Ω.

d) Für eine in Ω harmonische Funktion $u \in \overline{\mathcal{C}}^1(\Omega, \mathbb{R})$ gilt stets

$$\textstyle\int_{\partial\Omega} \partial_{\mathfrak{n}} u(y)\, d\sigma(y) \;=\; 0\,; \tag{10}$$

dies folgt sofort aus (5) mit 1 an Stelle von E_x. Zu $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$ kann es daher nur dann eine in Ω harmonische Funktion $u \in \overline{\mathcal{C}}^1(\Omega, \mathbb{R})$ mit $\partial_{\mathfrak{n}} u|_{\partial\Omega} = g$ geben *(Neumann-Problem),* wenn $\int_{\partial\Omega} g(y)\, d\sigma(y) = 0$ ist.

e) Auch *gemischte Randwertaufgaben* sind interessant: Zu Funktionen $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$ und $h \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$ mit $h \geq 0$ sucht man eine in Ω harmonische Funktion $u \in \overline{\mathcal{C}}^1(\Omega, \mathbb{R})$ mit $(\partial_{\mathfrak{n}} u + hu)|_{\partial\Omega} = g$.

In diesem Abschnitt lösen wir das Dirichlet-Problem für Kugeln und beginnen mit dem Fall $n = 2$.

81.9 Produktansatz in Polarkoordinaten. a) Der Laplace-Operator in ebenen Polarkoordinaten lautet

$$\Delta \;=\; \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\,. \tag{11}$$

Ein Produktansatz $u(r, \varphi) = f(r)\, g(\varphi)$ für Lösungen von $\Delta u = 0$ liefert

$$g''(\varphi) + \lambda\, g(\varphi) \;=\; 0\,, \tag{12}$$

$$r^2 f''(r) + r\, f'(r) - \lambda\, f(r) \;=\; 0\,. \tag{13}$$

b) Da g 2π-periodisch sein muß, hat man für (12) die Eigenfunktionen $e^{\pm ik\varphi}$ zu den Eigenwerten $\lambda = k^2$, $k \in \mathbb{N}_0$.

c) Setzt man $\lambda = k^2$ in (13) ein, so erhält man die Lösungen

$$f(r) \;=\; c + d\,\log r \quad \text{für } k = 0\,, \qquad f(r) \;=\; c\,r^k + d\,r^{-k} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}\,. \tag{14}$$

Es sind also $u(r, \varphi) = c + d\,\log r$ und $u(r, \varphi) = (c\,r^k + d\,r^{-k})\, e^{\pm ik\varphi}$ harmonische Funktionen auf Kreisringen.

81.10 Poisson-Kern in der Ebene. a) Auf Kreisen $K = K_R(0)$ muß in (14) $d = 0$ gelten. Zur Lösung des *Dirichlet-Problems* macht man den Ansatz

$$h(r, \varphi) \;=\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, r^{|k|}\, e^{ik\varphi}\,; \tag{15}$$

die Randbedingung $h(R,\varphi) = g(\varphi)$ liefert dann $c_k\, R^{|k|} = \widehat{g}(k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Es folgt

$$h(r,\varphi) \;=\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{g}(k)\,(\tfrac{r}{R})^{|k|}\, e^{ik\varphi}\,. \tag{16}$$

b) Für $R = 1$ berechnet man weiter

$$h(r,\varphi) \;=\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\, e^{-ikt}\, dt\, r^{|k|}\, e^{ik\varphi} \;=\; \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\varphi - t)\, g(t) dt \tag{17}$$

mit dem *Poisson-Kern*

$$P_r(s) \;=\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}\, e^{iks} \;=\; 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} r^k \,\cos ks \tag{18}$$

$$= \; 1 + 2\;\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{\infty} r^k\, e^{iks} \;=\; \mathrm{Re}\;(1 + 2\, \tfrac{re^{is}}{1 - r\, e^{is}})$$

$$= \; \mathrm{Re}\; \frac{1 + r\, e^{is}}{1 - r\, e^{is}} \;=\; \frac{1 - r^2}{|\, 1 - r\, e^{is}\,|^2} \tag{19}$$

$$= \; \frac{1 - r^2}{1 - 2\, r\, \cos s + r^2}\,. \tag{20}$$

c) Es ist (P_r) eine *Dirac-Folge* für $r \to 1$. Es gilt

$$u(re^{i\varphi}) \;=\; \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\varphi - t)\, u(e^{it}) dt \tag{21}$$

für jede auf $\overline{K}$ stetige und in K harmonische Funktion u . Wegen (19) gilt dann $u = \mathrm{Re}\, f$ für die in K holomorphe Funktion

$$f(z) \;=\; \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\, u(e^{it}) dt\,, \quad z = r\, e^{i\varphi}\,. \tag{22}$$

Auch im Fall $n \geq 3$ kann man analog zu 81.9 einen *Produktansatz in Kugelkoordinaten* durchführen. Statt dessen stellen wir eine andere Methode vor, die einige Vorbereitungen erfordert:

81.11 Greensche Funktionen. a) Es sei wieder $\Omega \in \mathfrak{G}_s(\mathbb{R}^n)$ mit $\sigma(\partial\Omega) < \infty$. Die Integralformel (4) bleibt für $x \in \Omega$ dann gültig, wenn das Newton-Potential $E_x : y \mapsto E(y - x)$ durch eine Funktion $G_x : y \mapsto E_x(y) - F_x(y)$ ersetzt wird, für die $F_x \in \overline{\mathcal{C}}^1(\Omega)$ auf Ω harmonisch ist; in der Tat gilt dann (5) für F_x , $x \in \overline{\Omega}$. Gilt nun $G_x(y) = 0$ für $y \in \partial\Omega$, so folgt aus (4) die Integralformel

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} u(y)\, \partial_{\mathfrak{n}} G_x(y)\, d\sigma(y)\,, \quad x \in \Omega\,. \tag{23}$$

b) Existiert eine solche Funktion $F_x \in \overline{\mathcal{C}}^1(\Omega)$ für alle $x \in \Omega$, so heißt

$$G : (\Omega \times \overline{\Omega}) \backslash \{(x,x) \mid x \in \Omega\} \mapsto \mathbb{R}\,, \;\; G(x,y) \;=\; E_x(y) - F_x(y)\,, \tag{24}$$

eine *Greensche Funktion* für Ω .

c) Für $x \in \Omega$ kann man F_x als *Lösung des Dirichlet-Problems* zur Randfunktion $E_x|_{\partial\Omega}$ wählen. Umgekehrt kann man für Kugeln Greensche Funktionen unmittelbar angeben und damit das *Dirichlet-Problem lösen:*

81.12 Satz. *Eine Greensche Funktion für die Euklidische Einheitskugel* $K := K_1(0)$ *des* $\mathbb{R}^n$ *ist gegeben durch*

$$G(x,y) \;=\; E(x-y) - E(\tfrac{x}{|x|} - |x|\,y) \quad \textit{für} \;\; x \in K\backslash\{0\} \tag{25}$$

und $G(0,y) = E(y) - E(\eta_0)$, $\eta_0 \in S^{n-1}$ *fest. Auf der Menge*

$$M := \;\{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid y \neq x \;\;\textit{und}\;\; y \neq \tfrac{x}{|x|^2}\}$$

ist G *in* x *und in* y *harmonisch, und man hat* $G(x,y) = G(y,x)$.

Beweis. Für $x \in \mathbb{R}^n$ ist $G(x,y)$ auf $\mathbb{R}^n\backslash\{x, \frac{x}{|x|^2}\}$ harmonisch in y; aus

$$|\tfrac{x}{|x|} - |x|\,y|^2 = 1 - 2\langle x, y\rangle + |x|^2\,|y|^2 = |\tfrac{y}{|y|} - |y|\,x|^2 \tag{26}$$

für $x, y \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ folgt $G(x,y) = G(y,x)$ auf M. Daher ist $G(x,y)$ auf $\mathbb{R}^n\backslash\{y, \frac{y}{|y|^2}\}$ auch harmonisch in x, und man hat $G(x,y) = 0$ für $|y| = 1$ und $x \neq y$.

81.13 Poisson-Kern im $\mathbb{R}^n$. a) Mittels (2), (25) und (26) berechnet man

$$P(x,\eta) := \;\partial_{\mathfrak{n}} G_x(\eta) \;=\; \frac{1-|x|^2}{\tau_n\,|\eta - x|^n}\,, \quad |x| < 1\,, \;\; |\eta| = 1\,. \tag{27}$$

b) Die Funktion $P : K \times S^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$ heißt *Poisson-Kern* für die Einheitskugel. Wegen

$$\Delta_x\, \partial^y_{\mathfrak{n}} G(x,y) \;=\; \partial^y_{\mathfrak{n}}\, \Delta_x G(x,y) \;=\; 0 \qquad \text{für} \;\; |y| \;\; \text{nahe} \;\; 1$$

ist die Funktion P^η für alle $\eta \in S^{n-1}$ *harmonisch* in $x \in K$.

c) Man hat $P \geq 0$, und aus (27) und (23) mit $u = 1$ folgt

$$\textstyle\int_{S^{n-1}} P(x,\eta)\, d\sigma(\eta) \;=\; 1 \quad \text{für} \quad |x| < 1\,. \tag{28}$$

Für alle $\delta > 0$ gilt nach (27)

$$\lim_{r\to 1} \sup\{P(r\xi,\eta) \mid \xi,\eta \in S^{n-1} \;\;\text{und}\;\; |\xi - \eta| \geq \delta\} \;=\; 0\,. \tag{29}$$

Daher ist $\{P(r\cdot,\cdot)\}$ „eine Art“ *Dirac-Familie* für $r \to 1^-$, und ähnlich wie in Satz 79.4 ergibt sich:

81.14 Theorem. *Für* $g \in \mathcal{C}(S^{n-1})$ *löst das* Poisson-Integral

$$Pg(x) := \;\left\{ \begin{array}{rcl} \int_{S^{n-1}} P(x,\eta)\, g(\eta)\, d\sigma(\eta) & , & |x| < 1 \\ g(x) & , & |x| = 1 \end{array} \right. \tag{30}$$

das Dirichlet-Problem: Es ist Pg *auf* $\overline{K}$ *stetig und in* K *harmonisch.*

81.15 Bemerkungen. a) Ist $g \in \mathcal{C}(\overline{K})$ in K harmonisch, so lösen g und Pg das Dirichlet-Problem mit den Randwerten $g|_{\partial K}$, so daß $g = Pg$ folgt. Durch (30) ist also eine *Integralformel* für g, die *Poissonsche Integralformel* gegeben. Im Fall $n = 2$ stimmt diese mit (21) überein.

b) Für beliebige Kugeln $K_R(a)$ ergibt sich die Lösung des *Dirichlet-Problems* für $z = a + Rx \in K_R(a)$ mittels $y = a + R\eta$ zu

$$Pg(z) \;\;=\;\; \int_{S^{n-1}} \frac{1-|x|^2}{\tau_n\,|\eta - x|^n}\, g(a + R\eta)\, d\sigma(\eta) \tag{31}$$

$$\;\;=\;\; \frac{1}{\tau_n\, R} \int_{\partial K_R(a)} \frac{R^2 - |z-a|^2}{|z-y|^n}\, g(y)\, d\sigma(y)\,. \tag{32}$$

81.16 Satz. *Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine stetige Funktion $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ besitze die* Mittelwerteigenschaft *(9). Dann ist u harmonisch in Ω.*

Beweis. Es seien $\overline{K}_R(a) \subseteq D$ und $v \in \mathcal{H}(K_R(a))$ das Poisson-Integral (32) von $u|_{\partial K_R(a)}$. Die Funktion $u - v$ besitzt dann die Mittelwerteigenschaft in $K_R(a)$, so daß für diese das Maximum-Prinzip 81.6 gilt. Folgerung 81.7 impliziert dann $u - v = 0$ auf $K_R(a)$, so daß u dort harmonisch ist.

81.17 Folgerung. *Für eine Folge (u_n) in $\mathcal{H}(\Omega)$ gelte $f_n \to f$ lokal gleichmäßig. Dann gilt auch $u \in \mathcal{H}(\Omega)$.*

Beweis. Es ist f stetig, und die Mittelwerteigenschaft (9) vererbt sich von den u_n auf die Grenzfunktion u.